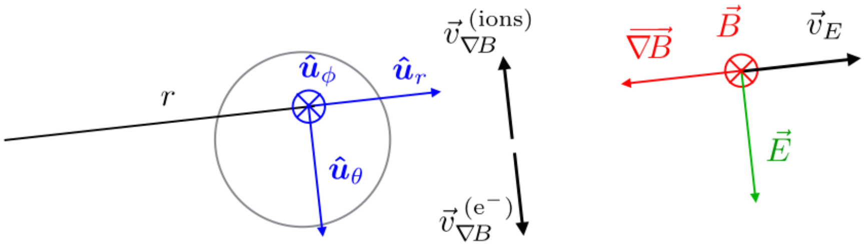
PC6 Physique des plasmas - corrigé

Exercice 1

(a) Le gradient de B est dirigé selon $-\hat{\boldsymbol{u}}_r$: $\boldsymbol{\nabla B} = -\frac{1}{r^2}\hat{\boldsymbol{u}}_r$, et la dérive de gradient est donnée par : $\boldsymbol{v}_{\nabla B} = \pm\frac{1}{2}r_L v_\perp \frac{\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{\nabla B}}{B^2}$ (les ions dérivent dans le même sens que $\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{\nabla B}$). Les ions dérivent donc dans la direction $-\hat{\boldsymbol{u}}_\theta$ (vers le haut) et les électrons dans la direction $-\hat{\boldsymbol{u}}_\theta$ (vers le bas, cf schéma).

(b) Il se crée donc un champ de charge d'espace $\boldsymbol{E}$ dirigé selon $\hat{\boldsymbol{u}}_\theta$ (vers le bas). La dérive électrique dans le champ magnétique ne dépend du signe de la charge et vaut $\boldsymbol{v}_E = \frac{\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{B}}{B^2}$. Les particules vont donc dériver dans la direction $\hat{\boldsymbol{u}}_r$, et on ne pourra donc pas confiner un plasma avec un tel champ magnétique.



Exercice 2

L'équation de Poisson s'écrit $-\frac{d^2\phi}{dx^2} = \frac{1}{\varepsilon_0}\sum_i q_i n_i = \frac{1}{\varepsilon_0}\sum_i q_i n_0\, e^{-\frac{q_i\phi}{k_B T_i}} \simeq \frac{\phi}{\varepsilon_0}\sum_i n_0 q_i\left(1 - \frac{q_i}{k_B T_i}\right)$. (On prend $q_i\phi \ll k_B T_i$ uniquement pour simplifier le calcul, mais la résolution analytiques est possible sans faire cette approximation).

Par hypothèse de neutralité (pour le plasma non perturbé par le potentiel ϕ) on a $\sum_i q_i n_0 = 0$ donc $-\frac{d^2\phi}{dx^2} \simeq -\frac{\phi}{\varepsilon_0}\sum_i \frac{n_0 q_i^2}{k_B T_i}$

On a donc $\frac{d^2\phi}{dx^2} - \frac{\phi}{\lambda_D^2}$ avec $\frac{1}{\lambda_D^2} = \frac{1}{\varepsilon_0}\sum_i \frac{n_i^0 q_i^2}{k_B T_i}$. Alors $\phi(x) = \phi_0 e^{-\frac{|x|}{\lambda_D}}$.

Si $T_j \ll T_{i\neq j}$ on aura $\frac{1}{\lambda_D^2} \simeq \frac{n_j^0 q_j^2}{k_B T_j}$, la longueur de Debye est bien déterminée par l'espèce la plus froide.

Exercice 3

(a) $f(v)=n_p\left(\frac{m}{2\pi k_BT_p}\right)^{\frac{3}{2}}e^{-\frac{mv^2}{2k_BT_p}}+n_b\left(\frac{m}{2\pi k_BT_b}\right)^{\frac{3}{2}}e^{-\frac{m}{2k_BT_b}\left[(v_x-v_b)^2+v_y^2+v_z^2\right]}$

(b) Si on applique un champ magnétostatique selon x, la température dans le plan perpendiculaire à x change (car l'énergie des particules change). En notant $T_\perp$ cette température on a :

$$f(v)=n_p\left(\frac{m}{2\pi k_BT_p}\right)^{\frac{1}{2}}\frac{m}{2\pi k_BT_\perp}e^{-\frac{m}{2k_B}\left(\frac{v_x^2}{T_p}+\frac{v_y^2+v_z^2}{T_\perp}\right)}+n_b\left(\frac{m}{2\pi k_BT_b}\right)^{\frac{1}{2}}\frac{m}{2\pi k_BT_\perp}e^{-\frac{m}{2k_B}\left(\frac{(v_x-v_b)^2}{T_b}+\frac{v_y^2+v_z^2}{T_\perp}\right)}$$

Les éléments du tenseur de pression sont donnés par $P_{ij}=mn\left\langle(v_i-\langle v_i\rangle)(v_j-\langle v_j\rangle)\right\rangle$. Considérons les électrons "faisceau". Pour $i\neq j$ on aura toujours une fonction impaire (celle en v_y ou v_z) à intégrer, donc l'intégrale sur les 3 variables est nulle. On a également $P_{yy}=P_{zz}=n_bk_BT_\perp$ (il y a une intégration par parties à faire). Pour calculer P_{xx} on fait le changement de variable $w_x=v_x-v_b$:

$$\begin{aligned}
P_{xx} &= mn_b\left(\frac{m}{2\pi k_BT_b}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{m}{2\pi k_BT_\perp}\right)\iiint(v_x-v_b)^2e^{-\frac{m}{2k_B}\left(\frac{(v_x-v_b)^2}{T_b}+\frac{v_y^2+v_z^2}{T_\perp}\right)}dv_xdv_ydv_z\\
&= mn_b\left(\frac{m}{2\pi k_BT_b}\right)^{\frac{1}{2}}\int(v_x-v_b)^2e^{-\frac{m(v_x-v_b)^2}{2k_BT_b}}dv_x\\
&= mn_b\left(\frac{m}{2\pi k_BT_b}\right)^{\frac{1}{2}}\int w_x^2e^{-\frac{mw_x^2}{2k_BT_b}}dw_x\\
&= mn_b\left(\frac{m}{2\pi k_BT_b}\right)^{\frac{1}{2}}\frac{k_BT_b}{m}\int e^{-\frac{mw_x^2}{2k_BT_b}}dw_x \qquad \text{(par IPP)}\\
&= mn_b\left(\frac{m}{2\pi k_BT_b}\right)^{\frac{1}{2}}\frac{k_BT_b}{m}\left(\frac{2\pi k_BT_b}{m}\right)^{\frac{1}{2}}\\
&= n_bk_BT_b
\end{aligned}$$

Pour les électrons "plasma", il faut faire attention au fait que la vitesse moyenne selon x n'est pas nulle, puisqu'on considère l'ensemble plasma+faisceau (et pas seulement le plasma). On a de même $P_{ij}=0\ \forall\ i\neq j$, $P_{yy}=P_{zz}=n_pk_BT_\perp$ et pour P_{xx} :

$$\begin{aligned}
P_{xx} &= mn_p\left(\frac{m}{2\pi k_BT_p}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{m}{2\pi k_BT_\perp}\right)\iiint(v_x-v_b)^2e^{-\frac{m}{2k_B}\left(\frac{v_x^2}{T_p}+\frac{v_y^2+v_z^2}{T_\perp}\right)}dv_xdv_ydv_z\\
&= mn_p\left(\frac{m}{2\pi k_BT_b}\right)^{\frac{1}{2}}\int(v_x-v_b)^2e^{-\frac{mv_x^2}{2k_BT_p}}dv_x\\
&= mn_p\left(\frac{m}{2\pi k_BT_p}\right)^{\frac{1}{2}}\left[\int v_x^2e^{-\frac{mv_x^2}{2k_BT_p}}dv_x-2\int v_xe^{-\frac{mv_x^2}{2k_BT_p}}dv_x+v_b^2\int e^{-\frac{mv_x^2}{2k_BT_p}}dv_x\right]\\
&= mn_p\left(\frac{m}{2\pi k_BT_p}\right)^{\frac{1}{2}}\left[\frac{k_BT_p}{m}\left(\frac{2\pi k_BT_p}{m}\right)^{\frac{1}{2}}-0+v_b^2\left(\frac{2\pi k_BT_p}{m}\right)^{\frac{1}{2}}\right]\\
&= n_p(k_BT_p+mv_b^2)
\end{aligned}$$

On a donc finalement :

$$P = \begin{pmatrix} n_p k_B T_p + n_b k_B T_b + n_p m v_b^2 & 0 & 0 \\ 0 & (n_p + n_b) k_B T_\perp & 0 \\ 0 & 0 & (n_p + n_b) k_B T_\perp \end{pmatrix}$$

Exercice 4

(a) Pour une onde optique (haute fréquence) on peut négliger le mouvement des protons et antiprotons. L'équation de propagation pour les ondes transverses est donnée par :

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\boldsymbol{E} = \mu_0 \frac{\partial \boldsymbol{J}}{\partial t}$$

L'équation du mouvement linéarisée donne pour les électrons (-) ou les positrons (+) :

$$m\frac{\partial \boldsymbol{v}_\pm}{\partial t} = \pm e\boldsymbol{E}$$

Et donc pour la densité de courant on a $\dfrac{\partial \boldsymbol{j}_\pm}{\partial t} = +\dfrac{n_0 e^2}{m}\boldsymbol{E}$. Avec $\boldsymbol{J} = \boldsymbol{j}_+ + \boldsymbol{j}_-$ il vient :

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\boldsymbol{E} = \frac{2n_0 e^2}{m\varepsilon_0 c^2}\boldsymbol{E}$$

en utilisant le fait que $\mu_0\varepsilon_0 = 1/c^2$

Dans l'espace de Fourier on a donc l'équation de dispersion :

$$-k^2 + \frac{\omega^2}{c^2} = \frac{2\omega_p^2}{c^2}$$

L'indice de réfraction vaut $\eta = \dfrac{kc}{\omega}$ donc on a $1 - \eta^2 = 2\dfrac{\omega_p^2}{\omega^2}$ donc :

$$\eta = \sqrt{1 - 2\frac{\omega_p^2}{\omega^2}}$$

(b) La densité critique à la fréquence ω est atteinte lorsque $\eta^2(\omega) = 0$, donc pour $\omega^2 = 2\omega_p^2$. On trouve pour $\lambda = 800\,\text{nm}$ une densité critique égale à $8.5 \times 10^{20}\,\text{cm}^{-3}$