

PC5 Physique des plasmas

Ondes électromagnétiques dans un plasma magnétisé

08/01/2015

A. Plasma non magnétisé

(1) Le plasma étant froid, il ne peut pas y exister d'onde électromagnétique longitudinale, seulement des oscillations électroniques locales à la fréquence plasma ω_p . Si le plasma était chaud, cette oscillation pourrait se propager (onde de Langmuir, cf poly).

$$\text{On a } \nabla \times \mathbf{E}_1 = -\frac{\partial \mathbf{B}_1}{\partial t} \text{ donc } \nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}_1) = -\frac{\partial}{\partial t} \nabla \times \mathbf{B}_1 = -\mu_0 \frac{\partial \mathbf{j}}{\partial t} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}_1}{\partial t^2}.$$

On cherche une onde qui se propage, donc une onde transverse, donc on a $\nabla \cdot \mathbf{E}_1 = 0$ (une onde transverse ne provoque pas de perturbation de densité, n_1 est donc rigoureusement nul) et donc $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}_1) = -\nabla^2 \mathbf{E}_1$. Il vient finalement :

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \mathbf{E}_1 = \mu_0 \frac{\partial \mathbf{j}}{\partial t}$$

(2) L'équation du mouvement pour les électrons est dans le cas d'un plasma froid :

$$m \left[\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} - (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} \right] = -e [\mathbf{E}_1 + \mathbf{v} \times \mathbf{B}_1]$$

Avec $\mathbf{v} = \mathbf{v}_1$, terme d'ordre 1, l'équation linéarisée devient :

$$\frac{\partial \mathbf{v}_1}{\partial t} = -\frac{e}{m} \mathbf{E}_1$$

Et la densité de courant vaut $\mathbf{j}_1 = -en_0 \mathbf{v}_1$ donc $\frac{\partial \mathbf{j}_1}{\partial t} = \frac{n_0 e^2}{m} \mathbf{E}_1$. On remplace dans l'équation d'onde :

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \mathbf{E}_1 = \frac{\omega_p^2}{c^2} \mathbf{E}_1$$

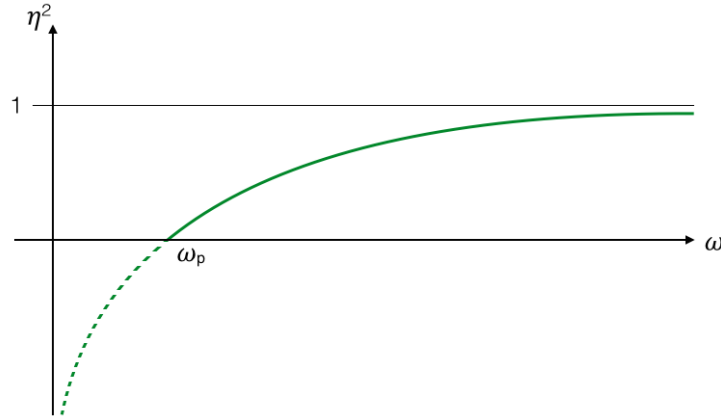
où $\omega_p^2 = \frac{n_0 e^2}{m \varepsilon_0}$ et en utilisant le fait que $\mu_0 = \frac{1}{\varepsilon_0 c^2}$.

(3) On a $\frac{\partial}{\partial t} \rightarrow -i\omega$ et $\nabla \rightarrow i\mathbf{k}$ donc il vient :

$$\left(-k^2 + \frac{\omega^2}{c^2}\right) \mathbf{E}_1 = \frac{\omega_p^2}{c^2} \mathbf{E}_1$$

Cette équation a une solution non triviale pour $\omega^2 = \omega_p^2 + k^2 c^2$ (ω_p fréquence de coupure). En faisant apparaître l'indice de réfraction $\eta = \frac{kc}{\omega}$:

$$\eta^2(\omega) = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}$$



Pour $\omega < \omega_p$, on a $\eta^2 < 0$ donc η est imaginaire pur, on peut écrire $\eta = i\beta$ avec $\beta > 0$. En utilisant le fait¹ que $k(\omega) = \frac{2\pi}{\lambda_0} \eta(\omega)$ (λ_0 étant la longueur d'onde *dans le vide*), l'amplitude complexe de l'onde est alors proportionnelle à $e^{-i\omega t} e^{-2\pi\beta z/\lambda_0}$. il s'agit d'une onde évanescente, qui ne se propage pas dans le plasma.

(4) La vitesse de phase est $v_\varphi = \frac{\omega}{k}$ et $k = \frac{1}{c} \sqrt{\omega^2 - \omega_p^2}$ donc on a :

$$v_\varphi = \frac{c}{\sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}}}$$

On a donc $v_\varphi > c$, donc la phase de l'onde se déplace plus vite que c . Ce n'est pas aberrant car la phase ne contient aucune information.

La vitesse de groupe vaut $v_g = \frac{d\omega}{dk}$. On a $\omega^2 = \omega_p^2 + k^2 c^2$ donc $\omega d\omega = c^2 k dk$, soit $\frac{d\omega}{dk} = c^2 \frac{k}{\omega} = \frac{c^2}{v_\varphi}$, donc :

$$v_g = c \sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}} < c$$

(5) L'équation du mouvement linéarisée devient $m \frac{\partial \mathbf{v}_1}{\partial t} = -e \mathbf{E}_1 - m\nu \mathbf{v}_1$, ce qui donne en notation complexe :

$$\mathbf{v}_1 = -\frac{e}{m\nu - i\omega} \mathbf{E}_1 \quad \text{et donc} \quad \mathbf{j}_1 = \epsilon_0 \omega_p^2 \frac{\mathbf{E}_1}{\nu - i\omega}$$

1. Si vous avez oublié, on peut suivre la même démarche en raisonnant directement sur k plutôt que sur η , et arriver au même résultat

On trouve alors comme équation de dispersion $-k^2 + \frac{\omega^2}{c^2} = \frac{\omega_p^2/c^2}{1 + i\frac{\nu}{\omega}}$ et donc :

$$\eta^2 = 1 - \frac{\omega_p^2/\omega^2}{1 + i\frac{\nu}{\omega}}$$

donc $\Im(\eta) \neq 0$, donc l'onde est atténuée ou amplifiée. Pour le déterminer, il n'y a pas vraiment de manière simple. Raisonnons sur le vecteur d'onde k : la relation de dispersion s'écrit :

$$\omega^2 - k^2 c^2 = \frac{\omega_p^2}{1 + i\frac{\nu}{\omega}}$$

On a donc pour le vecteur d'onde :

$$k^2 c^2 = \omega^2 - \frac{\omega_p^2}{1 + \frac{\nu^2}{\omega^2}} + i\omega_p^2 \frac{\frac{\nu}{\omega}}{1 + \frac{\nu^2}{\omega^2}} = A + iB$$

avec $B > 0$. Si on écrit maintenant $kc = a + ib$, on a alors $A = a^2 - b^2$ et $B = 2ab$. Puisque notre convention de phase est $e^{i(kz - \omega t)} = e^{-bz} e^{i(az - \omega t)}$, si $a > 0$ l'onde se propage vers les z croissants, et si $a < 0$ vers les z décroissants. On voit alors que si a et b sont du même signe, l'onde est atténuée alors que si a et b sont de signe opposés, elle est amplifiée. Par conséquent, le signe de $B = 2ab$ détermine à lui seul si l'onde est atténuée ou amplifiée : pour $B > 0$, l'onde est atténuée, et c'est bien le cas ici.

B. Modes de propagation parallèle au champ magnétique

(1) L'équation du mouvement linéarisée devient en présence du champ \mathbf{B}_0 :

$$\frac{\partial \mathbf{v}_1}{\partial t} = -\frac{e}{m} [\mathbf{E}_1 + \mathbf{v}_1 \times \mathbf{B}_0]$$

En calculant le produit vectoriel on trouve $v_y = \frac{e}{im\omega} (E_y - B_0 v_x)$, qu'on injecte dans l'équation selon x pour trouver que :

$$v_x \left[1 - \frac{\omega_c^2}{\omega^2} \right] = -\frac{ie}{m\omega} E_x - \frac{e}{m\omega} \frac{\omega_c}{\omega} E_y$$

où $\omega_c = \frac{eB_0}{m}$. En posant $X = \frac{\omega_p^2}{\omega^2}$ et $Y = \frac{\omega_c}{\omega}$ on a pour la densité de courant :

$$j_x [1 - Y^2] = \varepsilon_0 \omega X [iE_x + Y E_y]$$

On calcule de même selon y :

$$j_y [1 - Y^2] = \varepsilon_0 \omega X [iE_y - Y E_x]$$

(2) On injecte j_x dans l'équation de propagation selon x : $\left(-k^2 + \frac{\omega^2}{c^2} \right) E_x = \frac{\omega^2}{c^2} \frac{X}{1 - Y^2} [E_x - iE_y]$

Il vient alors $\left[1 - \eta^2 - \frac{X}{1 - Y^2} \right] E_x + i \frac{XY}{1 - Y^2} E_y = 0$ qu'on peut écrire sous la forme :

$$(S - \eta^2) E_x - i D E_y = 0$$

On a de même selon y :

$$(S - \eta^2) E_y + i D E_x = 0$$

où $S = 1 - \frac{X}{1 - Y^2}$ et $D = -\frac{XY}{1 - Y^2}$.

(3) Le système $\begin{pmatrix} S - \eta^2 & -iD \\ iD & S - \eta^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \end{pmatrix} = \mathbf{0}$ a une solution non triviale si son déterminant est nul, soit :

$$(S - \eta^2)^2 - D^2 = 0$$

On en déduit que $\eta^2 = S \pm D$, on a bien les deux solutions $\eta_L^2 = S - D$ et $\eta_R^2 = S + D$.

$$\eta_L^2 = S - D$$

(4) En explicitant on trouve pour les deux modes :

$$\eta_L^2(\omega) = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega(\omega + \omega_c)} \quad \text{et} \quad \eta_R^2(\omega) = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega(\omega - \omega_c)}$$

On peut vérifier que si $B_0 = 0$, on retrouve bien la relation de dispersion établie dans la partie A.

Pour le mode L, la fréquence de coupure ω_L telle que $\eta_L^2(\omega_L) = 0$ est solution de l'équation :

$$\omega_L(\omega_L + \omega_c) = \omega_p^2$$

ce qui donne $\omega_L = \frac{1}{2} \left[-\omega_c \pm \sqrt{\omega_c^2 + 4\omega_p^2} \right]$. Seule la solution $\omega_L > 0$ a du sens, donc finalement :

$$\omega_L = \frac{1}{2} \left[-\omega_c + \sqrt{\omega_c^2 + 4\omega_p^2} \right]$$

On peut vérifier que si $B_0 = 0$, on a $\omega_L = \omega_p$, fréquence de coupure du plasma non magnétisé.

On remarque enfin que lorsque $\omega \rightarrow 0$, $\eta_L^2 \rightarrow -\infty$ et lorsque $\omega \rightarrow \infty$, $\eta_L^2 \rightarrow 1^-$.

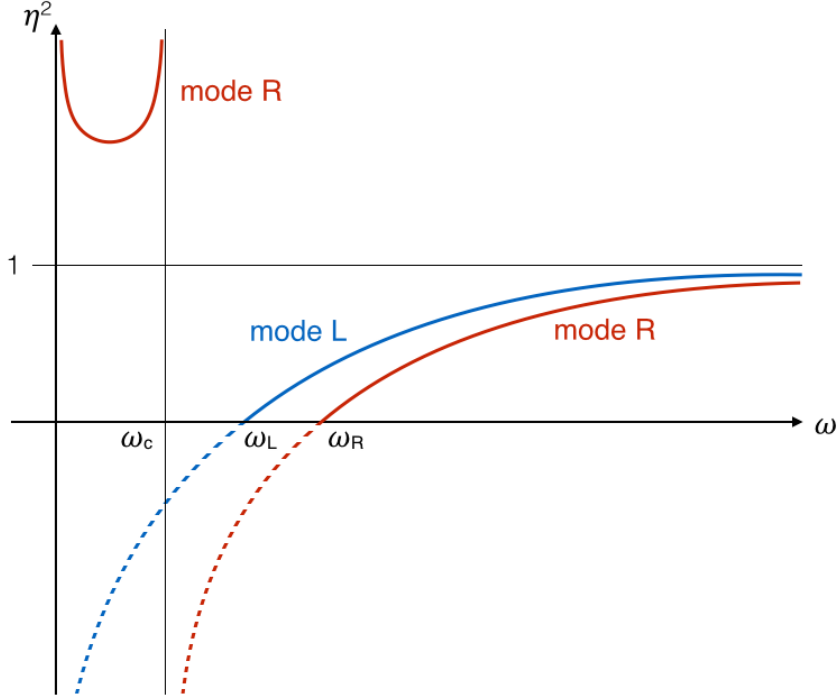
Pour le mode R, la fréquence de coupure ω_R est solution de l'équation $\omega_R(\omega_R - \omega_c) = \omega_p^2$. On retient la solution positive :

$$\omega_R = \frac{1}{2} \left[\omega_c + \sqrt{\omega_c^2 + 4\omega_p^2} \right]$$

On vérifie de même que $\omega_R = \omega_p$ si $B_0 = 0$.

On remarque également que lorsque $\omega \rightarrow 0$, $\eta_R^2 \rightarrow +\infty$ et lorsque $\omega \rightarrow \infty$, $\eta_R^2 \rightarrow 1^-$. Il existe enfin une résonance à $\omega = \omega_c$. Lorsque $\omega \rightarrow \omega_c^-$, $\eta_R^2 \rightarrow +\infty$ et lorsque $\omega \rightarrow \omega_c^+$, $\eta_R^2 \rightarrow -\infty$.

En constatant finalement que $\omega_c < \omega_L < \omega_R$, on en déduit l'allure du diagramme de dispersion :



On a donc deux bandes de propagation pour le mode R : $\omega > \omega_R$, et $\omega < \omega_c$.

Rq : à ce stade, on se sait pas encore que $\eta_R^2 > 1$ pour $\omega < \omega_c$, on le vérifiera dans la partie suivante.

(5) On a le système suivant :

$$\begin{pmatrix} S - \eta^2 & -iD \\ iD & S - \eta^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \end{pmatrix} = \mathbf{0}$$

En multipliant la 2^e ligne par i , puis en prenant la somme et la différence des 2 lignes on obtient :

$$\begin{pmatrix} S - D - \eta^2 & 0 \\ 0 & S + D - \eta^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_x + iE_y \\ E_x - iE_y \end{pmatrix} = \mathbf{0}$$

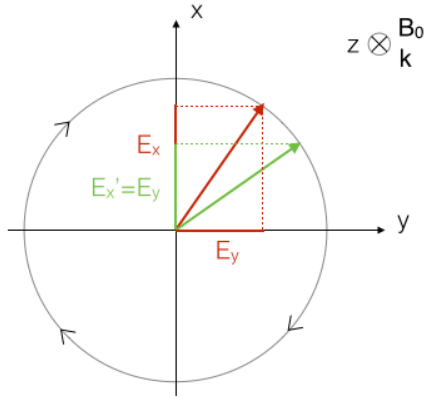
On constate donc que si $\eta^2 = S - D = \eta_L^2$, alors $S + D - \eta^2 \neq 0$ donc $E_x = iE_y$. De même, si $\eta^2 = S + D = \eta_R^2$, alors $S - D - \eta^2 \neq 0$ donc $E_x = -iE_y$. Ceci correspond bien à deux ondes de polarisation circulaire gauche et droite.

On cherche à déterminer l'hélicité du mode R : on a $E_x = -iE_y = e^{-i\frac{\pi}{2}} E_y$.

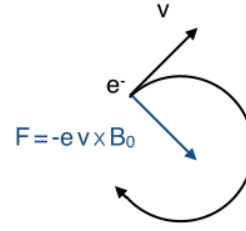
Si $E_y \propto e^{-i\omega t}$, alors $E_x \propto e^{-i(\omega t + \frac{\pi}{2})}$ donc E_x est en avance de phase. Le mode R a donc une polarisation circulaire droite (cf schéma), et inversement pour le mode L.

La résonance pour le mode R est due au fait que le champ électrique tourne dans le même sens que les électrons (cf schéma). Lorsque $\omega = \omega_c$, toute l'énergie de l'onde est transmise aux électrons. Si on avait pris en compte le mouvement des ions (inverse de celui des électrons), on aurait également trouvé pour le mode L une résonance à la fréquence cyclotron ionique.

pour le mode R :



Les électrons tournent dans le champ B_0 :



C. Ondes siffleuses

$$(1) \eta_R^2(\omega) = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega(\omega - \omega_c)} \text{ donc } \frac{\eta_R^2}{d\omega} = \frac{\omega_p^2(2\omega - \omega_c)}{\omega^2(\omega - \omega_c)^2} \text{ et donc } \frac{d\eta_R^2}{d\omega} = 0 \text{ pour } \omega = \frac{\omega_c}{2}.$$

On peut calculer $\eta_R^2(\frac{\omega_c}{2}) = 1 + 4\frac{\omega_p^2}{\omega_c^2}$ (donc $\eta_R^2 > 1$) et donc :

$$v_\varphi = \frac{c}{\sqrt{1 + 4\frac{\omega_p^2}{\omega_c^2}}}$$

$$(2) \text{ On a } \frac{k^2 c^2}{\omega^2} = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega(\omega - \omega_c)}, \text{ ou } k^2 c^2 = \omega^2 - \frac{\omega_p^2 \omega}{\omega - \omega_c}, \text{ donc } c^2 k dk = \left(\omega + \frac{\omega_c \omega_p^2}{2(\omega - \omega_c)^2} \right) d\omega.$$

On a donc :

$$\frac{d\omega}{dk} = \frac{kc^2}{\omega + \frac{\omega_c \omega_p^2}{2(\omega - \omega_c)^2}} \simeq \frac{kc^2}{\omega + \frac{\omega_p^2}{2\omega_c}} \quad \text{si } \omega \ll \omega_c$$

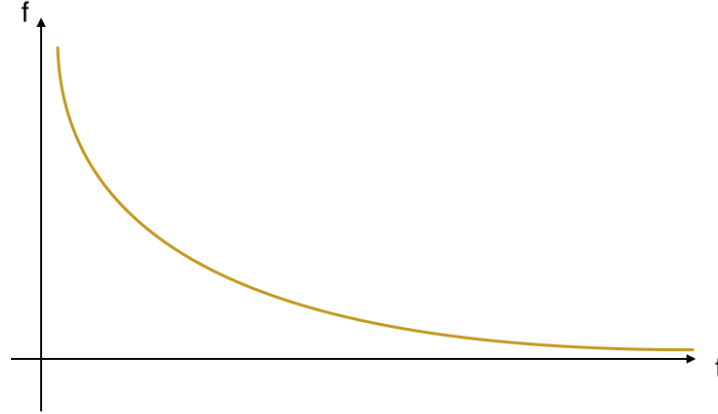
On a de plus $k^2 c^2 = \omega^2 - \frac{\omega_p^2 \omega}{\omega - \omega_c}$ donc :

$$kc = \left[\omega^2 - \frac{\omega_p^2}{1 - \frac{\omega_c}{\omega}} \right]^{\frac{1}{2}} \simeq \left[\omega^2 + \omega \frac{\omega_p^2}{\omega_c} \right]^{\frac{1}{2}} \quad \text{si } \omega \ll \omega_c$$

Si $v_\varphi \ll c$ on a $\eta^2 \gg 1$ donc $1 - \frac{\omega_p^2}{\omega(\omega - \omega_c)} \gg 1$ donc $\frac{\omega_p^2}{\omega\omega_c} \gg 1$ (puisque $\omega \ll \omega_c$). On a alors :

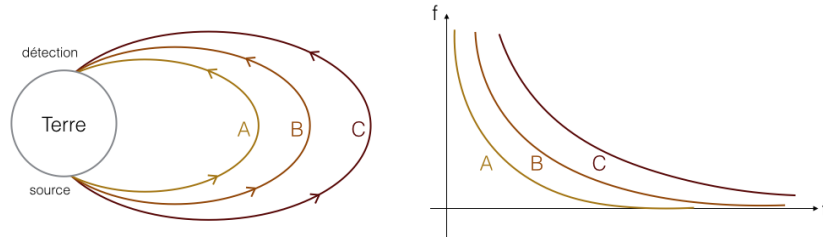
$$\frac{d\omega}{dk} = \frac{c \left[1 + \frac{\omega_p^2}{\omega\omega_c} \right]^{\frac{1}{2}}}{1 + \frac{\omega_p^2}{2\omega\omega_c}} \simeq 2c \frac{\sqrt{\omega_c}}{\omega_p} \sqrt{\omega}$$

(3) $v_g \propto \sqrt{\omega}$ donc les hautes fréquences se propagent plus vite que les basses fréquences. Le graphe $f(t)$ détecté aura donc l'allure suivante :



Cela produit donc un sifflement caractéristique de tonalité descendante. Bien entendu, vu l'allure de la courbe $\eta_R^2 = f(\omega)$ pour $\omega < \omega_c$, on peut aussi avoir (bien que plus rarement) des sifflements de tonalité ascendante.

À noter également que la même source crée en général plusieurs sifflements, présentant des fréquences plus ou moins étalées et arrivant à des instants différents, car les ondes peuvent être guidées le long de différentes lignes de champ (cf figure ci-dessous).



D. Effet Faraday

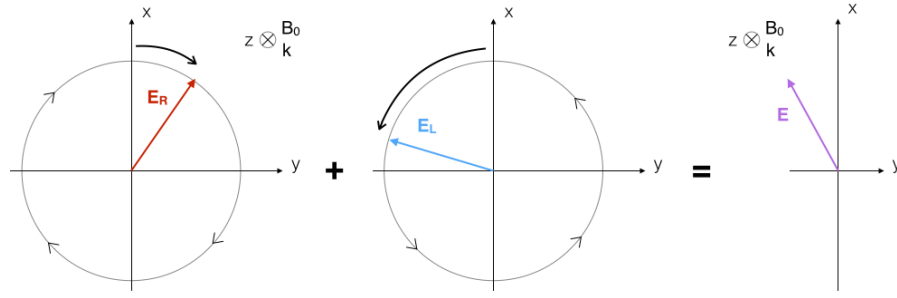
(1) En $z = 0$ on a $\mathbf{E}(0, t) = E_0 e^{-i\omega t} \hat{\mathbf{x}} = \frac{E_0 e^{-i\omega t}}{\sqrt{2}} \left[\frac{\hat{\mathbf{x}} + i\hat{\mathbf{y}}}{\sqrt{2}} + \frac{\hat{\mathbf{x}} - i\hat{\mathbf{y}}}{\sqrt{2}} \right] = \frac{E_0 e^{-i\omega t}}{\sqrt{2}} [\hat{\mathbf{r}} + \hat{\mathbf{l}}]$ (une onde polarisée linéairement est bien la superposition de 2 ondes polarisées circulairement).

Après s'être propagée sur une distance z on donc :

$$\begin{aligned} E(z, t) &= \frac{E_0 e^{-i\omega t}}{\sqrt{2}} \left[e^{ik_R z} \hat{\mathbf{r}} + e^{ik_L z} \hat{\mathbf{l}} \right] \\ &= \frac{E_0}{2} e^{i \left[\frac{k_R + k_L}{2} z - \omega t \right]} \left[e^{i \frac{k_R - k_L}{2} z} (\hat{\mathbf{x}} + i\hat{\mathbf{y}}) + e^{-i \frac{k_R - k_L}{2} z} (\hat{\mathbf{x}} - i\hat{\mathbf{y}}) \right] \\ &= E_0 e^{i \left[\frac{k_R + k_L}{2} z - \omega t \right]} \left[\cos \left(\frac{k_R - k_L}{2} z \right) \hat{\mathbf{x}} - \sin \left(\frac{k_R - k_L}{2} z \right) \hat{\mathbf{y}} \right] \end{aligned}$$

La polarisation a donc tourné d'un angle $\theta_F = \frac{k_R - k_L}{2} z$ dans le sens trigo lorsque l'onde part de l'observateur. Pour se convaincre du sens de rotation :

L'onde L se propage plus lentement que l'onde R donc le champ \mathbf{E}_L tourne d'un angle plus important (dans le sens trigo ici. Il en résulte une rotation globale du champ $\mathbf{E} = \mathbf{E}_L + \mathbf{E}_R$ dans le sens trigo.



$$(2) \text{ On a } k_{R,L} = \frac{2\pi}{\lambda_0} \eta_{R,L} = \frac{2\pi}{\lambda_0} \left[1 - \frac{\omega_p^2}{\omega(\omega \pm \omega_c)} \right]^{\frac{1}{2}}$$

Pour simplifier le calcul, on va supposer que $\eta_{R,L}$ est proche de 1, et on peut donc effectuer un DL de la racine carrée. On a donc :

$$k_{R,L} \simeq \frac{2\pi}{\lambda_0} \left[1 - \frac{\omega_p^2}{2\omega(\omega \pm \omega_c)} \right]$$

Et donc :

$$\theta_F \simeq \frac{z \omega_p^2}{4 c} \left| -\frac{1}{\omega - \omega_c} + \frac{1}{\omega + \omega_c} \right| \quad (\text{on a remplacé } \lambda_0 \text{ par } 2\pi c/\omega)$$

Ou encore :

$$\theta_F \simeq \frac{z \omega_p^2}{2 c} \frac{\omega_c}{\omega^2 - \omega_c^2}$$

Et comme $\omega_p^2 = \frac{n_0 e^2}{m \varepsilon_0}$ on en déduit finalement que :

$$n_0 \simeq \frac{2mc\varepsilon_0 \theta_F}{z\omega_c e^2} (\omega^2 - \omega_c^2)$$

On calcule les quantités :

$$\omega = \frac{2\pi c}{\lambda_0} = 2.36 \times 10^{11} \text{ s}^{-1}$$

$$\omega_c = \frac{eB_0}{m_e} = 1.76 \times 10^{10} \text{ s}^{-1}$$

Et on trouve alors $n_0 = 9.3 \times 10^{17} \text{ m}^{-3}$. On vérifie aussi que $\frac{\omega_p^2}{\omega(\omega \pm \omega_c)} \simeq \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \ll 1$

(3) Dans un plasma électron-positron, on ne peut pas négliger le mouvement des positrons qui ont la même masse que les électrons. On a calculé à la question (B-1) la densité de courant électronique, ici selon x :

$$j_x^{e-} [1 - Y^2] = \varepsilon_0 \omega X [iE_x + Y E_y]$$

Comme $m_{e-} = m_{e+}$ et $|q_{e-}| = |q_{e+}|$, les fréquences plasma et cyclotron, et donc les grandeurs X et Y sont les mêmes pour les électrons et les positrons, et la densité de courant positronique écrit alors :

$$j_x^{e+} [1 - Y^2] = \varepsilon_0 \omega X [iE_x - Y E_y]$$

La densité de courant totale vaut donc :

$$J_x [1 - Y^2] = 2i\varepsilon_0 \omega X E_x$$

La densité de courant selon x ne dépend donc plus de E_y , donc les directions x et y sont parfaitement équivalentes. Les deux modes L et R sont donc dégénérés et on peut montrer en remplaçant J_x dans l'équation de propagation que :

$$\eta^2 = 1 - \frac{2\omega_p^2}{\omega^2 - \omega_c^2}$$

Il n'y a donc pas de rotation de Faraday.