PC5 Physique des plasmas

Ondes électromagnétiques dans un plasma magnétisé

08/01/2015

A. Plasma non magnétisé

On s'intéresse à la propagation d'une onde électromagnétique $(\boldsymbol{E}_1, \boldsymbol{B}_1)$ dans un plasma froid sans collisions, dont les ions sont supposés immobiles. On note n_0 la densité électronique à l'équilibre, et n_1, $\boldsymbol{v}_1$ et $\boldsymbol{j}_1$ la densité, la vitesse moyenne, et la densité de courant des électrons perturbés par l'onde. Tous les termes indices 1 sont supposés d'ordre 1.

(1) Une onde longitudinale peut-elle se propager dans ce plasma ? Déduisez des équations de Maxwell l'équation de propagation du champ électrique $\boldsymbol{E}_1$ en fonction de la densité de courant électronique.

(2) En ne gardant que les termes d'ordre 1, linéarisez l'équation du mouvement des électrons et éliminez la densité de courant de l'équation obtenue à la question précédente.

(3) En supposant une onde plane de la forme $\boldsymbol{E}_1 e^{i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-\omega t)}$, écrivez la relation de dispersion de l'onde pour ce plasma, et tracez l'allure du graphe $\eta^2 = f(\omega)$, où $\eta = c/v_\varphi = kc/\omega$ est l'indice de réfraction du plasma.

(4) Que valent la vitesse de phase et la vitesse de groupe de cette onde ?

(5) On pourrait modéliser l'effet des collisions par une force $-m\nu_c \boldsymbol{v}$ dans l'équation du mouvement. Quelle serait la conséquence sur la propagation de l'onde ?

B. Modes de propagation parallèle au champ magnétique

On plonge maintenant le plasma de la partie A dans un champ statique $\boldsymbol{B}_0$ orienté selon $\hat{\boldsymbol{z}}$. On considère une onde plane $\propto \boldsymbol{E}_1 e^{i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-\omega t)}$ se propageant le long du champ $\boldsymbol{B}_0$ (on a donc $\boldsymbol{k} \parallel \boldsymbol{B}_0$). On notera $\boldsymbol{E}_1 = E_x\hat{\boldsymbol{x}} + E_y\hat{\boldsymbol{y}}$.

(1) Écrivez l'équation du mouvement linéarisée en présence du champ $\boldsymbol{B}_0$. En supposant une dépendance en $e^{i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-\omega t)}$, exprimez les composantes de la vitesse électronique $\boldsymbol{v}_1$ puis de la densité de courant associée

$\boldsymbol{j}_1$ en fonction du champ électrique de l'onde. On posera :

$$X = \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \qquad \text{et} \qquad Y = \frac{\omega_c}{\omega}$$

(2) En utilisant l'équation de propagation obtenue à la question (A-1), obtenez un système de deux équations couplées sur les composantes du champ électrique. On fera apparaître l'indice de réfraction du plasma et les quantités :

$$S = 1 - \frac{X}{1-Y^2} \qquad \text{et} \qquad D = -\frac{XY}{1-Y^2}$$

(3) Déduisez du système précédent l'équation de dispersion du plasma. Montrez qu'elle a deux solutions données par :

$$\eta_L^2 = S - D \qquad \text{et} \qquad \eta_R^2 = S + D$$

(4) Tracez l'allure du diagramme de dispersion $\eta^2 = f(\omega)$ pour les modes trouvés à la question précédente. Dans quelles bandes de fréquence la propagation est-elle possible ?

(5) Réécrivez le système obtenu précédemment en fonction des variables $E_x + iE_y$ et $E_x - iE_y$, et déduisez-en que les modes de propagation trouvés à la question précédente correspondent à deux ondes de polarisation circulaire droite et gauche. Quelle est la raison physique de la résonance du mode R à ω_c ?

C. Ondes siffleuses

(1) Montrez que, pour $\omega < \omega_c$, la vitesse de phase de l'onde R est maximale pour $\omega = \omega_c/2$. Calculez ce maximum local.

(2) Montrez que pour $\omega \ll \omega_c$ et $v_\varphi \ll c$, la vitesse de groupe de l'onde est proportionnelle à $\sqrt{\omega}$.

(3) Les siffleurs sont des phénomènes qui ont lieu dans la nature. Si un éclair tombe dans l'hémisphère sud, une impulsion électromagnétique à large spectre, en particulier dans les radio-fréquences, est émise. Certaines de ces ondes basse fréquence vont être guidées le long du champ magnétique terrestre dans le mode R, et peuvent être ainsi détectées dans l'hémisphère nord. Dans ce dernier cas, quel est l'allure typique du sonogramme (fréquence vs temps) détecté ?

D. Rotation de Faraday

On se situe maintenant dans la bande $\omega > \omega_R$ pour laquelle les deux modes R et L existent. Les indices de réfraction de ce modes étant différents, le plasma est un milieu biréfringent. Si une onde polarisée linéairement traverse le plasma, sa polarisation subira une rotation appelée rotation de Faraday.

(1) En supposant une onde de la forme $\boldsymbol{E}(z=0,t) = E_0 e^{-i\omega t}\hat{\boldsymbol{x}}$, calculez l'angle de rotation de la polarisation $\theta_F(z)$ après que l'onde a parcouru la distance z dans le plasma. On rappelle que si les vecteurs de polarisations linéaires $\hat{\boldsymbol{x}}$ et $\hat{\boldsymbol{y}}$ constituent une base orthonormée pour la description du champ $\boldsymbol{E}$, les vecteurs de polarisations circulaires $\hat{\boldsymbol{r}} = \dfrac{\hat{\boldsymbol{x}} + i\hat{\boldsymbol{y}}}{\sqrt{2}}$ et $\hat{\boldsymbol{\ell}} = \dfrac{\hat{\boldsymbol{x}} - i\hat{\boldsymbol{y}}}{\sqrt{2}}$ constituent également une base orthonormée...

(2) La rotation de Faraday peut-être un outil pour sonder la densité d'un plasma. Supposons qu'on envoie une onde de longueur d'onde $\lambda = 8\,\mathrm{mm}$ dans un plasma homogène soumis à un champ magnétique de 0.1 T. La polarisation de l'onde est tournée de 90^o après avoir traversé 1 m de plasma. Quelle est sa densité ? On supposera que $\frac{\omega_p 2}{\omega(\omega \pm \omega_c)} \ll 1$, ce qu'on vérifiera à posteriori.

(3) Quelle est la particularité de l'effet Faraday dans le cas d'un plasma électron-positron ?