PC4 Physique des plasmas

18/12/2014

Exercice 1 - Diffusion dans un plasma

A. Diffusion électronique libre

(1) $m_e n_e \left[\frac{\partial \boldsymbol{u_e}}{\partial t} + \boldsymbol{u_e} \cdot \boldsymbol{\nabla} \boldsymbol{u_e}\right] = -\nabla \underline{\underline{P}} - e n_e \left[\boldsymbol{E} + \boldsymbol{u_e} \times \boldsymbol{B}\right] - \nu_c m_e n_e \boldsymbol{u_e}$

(2) Plasma froid $\Rightarrow T = 0 \Rightarrow P = 0$. L'équation du mouvement devient, en l'absence de champ :

$$m_e n_e \frac{d\boldsymbol{u_e}}{dt} = -\nu_c m_e n_e \boldsymbol{u_e}$$

On a donc $\boldsymbol{u_e} = \boldsymbol{u_e}(0) e^{-\nu_c t}$, ν_c est le temps caractéristique de transfert de quantité de mouvement (des électrons vers les neutres).

(3) n_e' et u_e sont d'ordre 1 (puisqu'il n'y pas de courant d'électrons à l'équilibre, $\boldsymbol{u_e}$ résulte de la perturbation appliquée). Dans l'équation du mouvement, le terme d'inertie $\boldsymbol{u_e} \cdot \boldsymbol{\nabla} \boldsymbol{u_e}$ et tous les termes en $n_e' \boldsymbol{u_e}$ sont du second ordre. L'équation linéaire est obtenue en ne gardant que les termes d'ordre 1 :

$$m_e n_0 \frac{\partial \boldsymbol{u_e}}{\partial t} = -k_B T_e \boldsymbol{\nabla} n_e' - \nu_c m_e n_0 \boldsymbol{u_e}$$

L'équation de continuité est donnée par :

$$\frac{\partial n_e}{\partial t} + \boldsymbol{\nabla} \cdot (n_e \boldsymbol{u_e}) = 0$$

En ne gardant que les termes d'ordre 1 :

$$\frac{\partial n_e'}{\partial t} + n_0 \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{u_e} = 0$$

(4) On dérive l'équation de continuité par rapport au temps :

$$\frac{\partial^2 n_e'}{\partial t^2} + n_0 \boldsymbol{\nabla} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{u_e}}{\partial t} = 0$$

Et on substitue $\frac{\partial \boldsymbol{u_e}}{\partial t}$ en utilisant l'équation du mouvement. Il vient :

$$\frac{\partial n_e'}{\partial t} + \frac{1}{\nu_c} \frac{\partial^2 n_e'}{\partial t^2} = D_e \nabla^2 n_e'$$

(5)

$$\begin{aligned}
\frac{\partial n'_e}{\partial t} &\simeq \frac{n}{\tau} \\
\frac{1}{\nu_c}\frac{\partial^2 n'_e}{\partial t^2} &\simeq \frac{n}{\nu_c \tau^2}
\end{aligned}$$

On voit donc que si $\nu_c \tau^2 \gg \tau$, ou $\nu_c \gg 1/\tau$, le terme en $\dfrac{\partial^2 n'_e}{\partial t^2}$ est négligeable devant celui en $\dfrac{\partial n'_e}{\partial t}$. On ne peut pas vraiment se prononcer pour le terme en $\boldsymbol{\nabla} n'_e$. L'équation sur n'_e se simplifie alors en une équation de diffusion :

$$\frac{\partial n'_e}{\partial t} = D_e \nabla^2 n'_e$$

(6) L'équation du mouvement s'écrit :

$$\frac{1}{\nu_c}\frac{\partial \boldsymbol{u_e}}{\partial t} = -\frac{D_e}{n_0}\boldsymbol{\nabla} n'_e - \boldsymbol{u_e}$$

Le terme qu'on a négligé à la question précédente provient du terme en $\dfrac{\partial \boldsymbol{u_e}}{\partial t}$ de cette équation, on peut donc aussi le négliger. On a alors :

$$\boldsymbol{\Gamma_e} = n_0 \boldsymbol{u_e} = -D_e \boldsymbol{\nabla} n'_e$$

C'est la loi de Fick.

(7) En présence d'un champ magnétique, l'équation du mouvement linéaire s'écrit :

$$m_e n_0 \frac{\partial \boldsymbol{u_e}}{\partial t} = -k_B T_e \boldsymbol{\nabla} n'_e - \nu_c m_e n_0 \boldsymbol{u_e} - e n_0 \boldsymbol{u_e} \times \boldsymbol{B}$$

En négligeant le terme en $\dfrac{\partial \boldsymbol{u_e}}{\partial t}$ et avec $\Omega_c = \dfrac{eB_0}{m_e}$ il vient :

$$\boldsymbol{u_e} = -\frac{D_e}{n_0}\boldsymbol{\nabla} n'_e - \frac{\Omega_c}{\nu_c}\boldsymbol{u_e} \times \boldsymbol{\hat{z}}$$

ou encore :

$$\boldsymbol{\Gamma_e} = -D_e \boldsymbol{\nabla} n'_e - \frac{\Omega_c}{\nu_c}\,\boldsymbol{\Gamma_e} \times \boldsymbol{\hat{z}}$$

(8) On explicite les composantes de $\boldsymbol{\Gamma_e}$:

$$\begin{aligned}
\Gamma_{ex} &= -D_e \frac{\partial n'_e}{\partial x} - \frac{\Omega_c}{\nu_c}\,\Gamma_{ey} \\
\Gamma_{ey} &= -D_e \frac{\partial n'_e}{\partial y} + \frac{\Omega_c}{\nu_c}\,\Gamma_{ex} \\
\Gamma_{ez} &= -D_e \frac{\partial n'_e}{\partial z}
\end{aligned}$$

En substituant il vient :

$$\begin{aligned}
\left[1 + \frac{\Omega_c^2}{\nu_c^2}\right]\Gamma_{ex} &= -D_e \frac{\partial n'_e}{\partial x} + D_e \frac{\Omega_c}{\nu_c}\frac{\partial n'_e}{\partial y} \\
\left[1 + \frac{\Omega_c^2}{\nu_c^2}\right]\Gamma_{ey} &= -D_e \frac{\partial n'_e}{\partial y} - D_e \frac{\Omega_c}{\nu_c}\frac{\partial n'_e}{\partial x} \\
\Gamma_{ez} &= -D_e \frac{\partial n'_e}{\partial z}
\end{aligned}$$

Si on pose :

$$\begin{aligned} D_{\parallel} &= D_e \\ D_{\perp} &= D_e \frac{\nu_c^2}{\nu_c^2 + \Omega_c^2} \\ D_H &= D_e \frac{\nu_c \Omega_c}{\nu_c^2 + \Omega_c^2} \end{aligned}$$

On a a alors :

$$\boldsymbol{\Gamma_e} = -\begin{pmatrix} D_{\perp} & D_H & 0 \\ -D_H & D_{\perp} & 0 \\ 0 & 0 & D_{\parallel} \end{pmatrix} \boldsymbol{\nabla} n_e'$$

On voit que le gradient de densité dans la direction $\hat{\boldsymbol{x}}$ (resp. $\hat{\boldsymbol{y}}$) cause un courant d'électrons dans la direction $\hat{\boldsymbol{y}}$ (resp. $\hat{\boldsymbol{x}}$). Il s'agit d'un effet de type Hall, où il se crée un courant de charges dans la direction perpendiculaire aux champs $\boldsymbol{E}$ et $\boldsymbol{B}$ dans un conducteur soumis à un champ électromagnétique. Par analogie, c'est ici le gradient de densité qui, en mettant les porteurs de charge en mouvement, joue le rôle du champ $\boldsymbol{E}$.

(9) On a $\dfrac{\partial n_e'}{\partial t} + \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{\Gamma_e} = 0$. En explicitant, il vient :

$$\frac{\partial n_e'}{\partial t} = -D_{\perp} \left[\frac{\partial^2 n_e'}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 n_e'}{\partial y^2} \right] - D_{\parallel} \frac{\partial^2 n_e'}{\partial z^2}$$

On a $\dfrac{D_{\perp}}{D_{\parallel}} = \dfrac{\nu_c^2}{\nu_c^2 + \Omega_c^2} < 1$ donc la diffusion s'effectue principalement dans la direction parallèle à $\boldsymbol{B}$, le long des lignes d'induction. Plus le champ est intense, plus la diffusion sera guidée le long des lignes de champ.

B. Diffusion ambipolaire

(1) Les électrons vont diffuser seuls, laissant derrière eux un excès de charge positive. Il va se créer un champ de charge d'espace qui va freiner la diffusion des électrons et accélérer les ions.

(2) $f_E \simeq neE$ et le champ E est donné par l'équation de Poisson $\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{E} = \dfrac{\rho}{\varepsilon_0}$ qui indique que $\dfrac{E}{\ell} \simeq \dfrac{ne}{\varepsilon_0}$. On a donc finalement :

$$f_E \simeq \frac{n^2 e^2 \ell}{\varepsilon_0} \qquad \text{et} \qquad f_D \simeq k_B T_e \frac{n}{l}$$

On peut donc négliger la force due au champ de charge d'espace à condition que :

$$\ell^2 \ll \frac{\varepsilon_0 k_B T_e}{ne^2} \qquad \text{ou encore} \qquad \ell^2 \ll \lambda_D^2$$

f_E n'est donc pas négligeable puisque notre modélisation implique $\ell \gg \lambda_D$.

(3) et (4) Il faut rajouter la force électrique dans les équations du mouvement. Elle s'exprime pour les électrons par exemple comme $-en_e\boldsymbol{E}$. $\boldsymbol{E}$ est d'ordre 1, donc sous sa forme linéarisée elle devient $-en_0\boldsymbol{E}$. L'équation du mouvement linéaire pour les électrons devient :

$$m_e n_0 \frac{\partial \boldsymbol{u_e}}{\partial t} = -n_0 e\boldsymbol{E} - k_B T_e \boldsymbol{\nabla} n_e' - \nu_c m_e n_0 \boldsymbol{u_e}$$

Et en négligeant la dérivée temporelle de $\boldsymbol{u_e}$ comme dans les cas précédents on a pour les deux espèces de particules :

$$\begin{aligned} -\frac{e}{m_e}\boldsymbol{E} - k_B T_e \frac{\boldsymbol{\nabla} n'_e}{n_0 m_e} - \nu_{ce}\boldsymbol{u_e} &= 0 \\ +\frac{e}{m_i}\boldsymbol{E} - k_B T_i \frac{\boldsymbol{\nabla} n'_i}{n_0 m_i} - \nu_{ci}\boldsymbol{u_i} &= 0 \end{aligned}$$

où on a supposé des ions de charge $+e$. Le n_0 des ions est donc le même que celui des électrons. Il n'y pas de raison que la fréquence de collision effective avec les neutres soit la même pour les ions et les électrons, d'où les deux indices différents.

Les équation de continuité restent inchangées :

$$\begin{aligned} \frac{\partial n'_e}{\partial t} + \boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{u_e} &= 0 \\ \frac{\partial n'_i}{\partial t} + \boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{u_i} &= 0 \end{aligned}$$

Et le champ $\boldsymbol{E}$ donné par l'équation de Poisson $\varepsilon_0 \boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{E} = +en_i - en_e = e(n'_i - n'_e)$ (hypothèse de neutralité à l'ordre 0).

En combinant ces équations on arrive à :

$$\begin{aligned} \frac{\partial n'_e}{\partial t} &= \omega_{pe}^2(n'_i - n'_e) + D_e\nabla^2 n'_e \\ \frac{\partial n'_i}{\partial t} &= \omega_{pi}^2(n'_e - n'_i) + D_i\nabla^2 n'_i \end{aligned}$$

(5) On combine les deux équations précédentes pour arriver à :

$$k_B T_e \nabla^2 n'_e + k_B T_i \nabla^2 n'_i = m_e \nu_{ce}\frac{\partial n'_e}{\partial t} + m_i \nu_{ci}\frac{\partial n'_i}{\partial t}$$

Si on suppose que $n'_e = n'_i = n'$, on a :

$$\frac{\partial n'}{\partial t} = D_A \nabla^2 n'$$

où $D_A = \dfrac{k_B T_e + k_B T_i}{m_e \nu_{ce} + m_i \nu_{ci}}$. Il s'agit de la diffusion ambipolaire parfaite. En effet, tout se passe comme si les ions et les électrons diffusent à la même vitesse. Il s'agit d'un couplage électrique parfait (sans tenir compte de l'inertie des ions) entre ces deux espèces.

(6) Si $n'_i = \alpha n'_e$, avec $\alpha < 1$ on aura pour les électrons par exemple :

$$\frac{\partial n'_e}{\partial t} = D_e^A \nabla^2 n'_e$$

où $D_e^A = \dfrac{k_B T_e + \alpha k_B T_i}{m_e \nu_{ce} + \alpha m_i \nu_{ci}} < D_A$ (en effet il est raisonnable de supposer que T_e et T_i sont du même ordre de grandeur, tout comme ν_{ce} et ν_{ci} ; en revanche, $m_e \ll m_i$). Les électrons diffusent donc moins rapidement que dans le cas de la diffusion ambipolaire parfaite.

Exercice 2 - Instabilités de courant dans un plasma

A. Relation de dispersion en présence de courants de particules

(1) Pour une onde longitudinale, on a par définition $\boldsymbol{k} \times \boldsymbol{E} = 0$. En notation complexe, pour une onde harmonique de la forme $\boldsymbol{E_0} e^{i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-\omega t)}$, on a donc $i\boldsymbol{k} \times \boldsymbol{E} = 0$, *i.e.* $\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{E} = 0$.
Et comme $\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{E} = -\dfrac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}$, on a $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{B_1} =c^{\text{te}}$=0.

Une onde longitudinale n'induit pas de perturbation du champ magnétique. Pour une onde transverse, on aurait $i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{E} = \boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{E} = 0$. D'après l'équation de Poisson, une onde transverse n'induit donc pas de perturbation de la densité de charges.

(2) L'équation de continuité linéarisée est pour chaque espèce α :

$$\frac{\partial n_1^{(\alpha)}}{\partial t} + n_0^{(\alpha)} \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{u_1^{(\alpha)}} + \boldsymbol{u_0}^{(\alpha)} \cdot \boldsymbol{\nabla} n_1^{(\alpha)} = 0$$

Et l'équation du mouvement est donnée par :

$$m_\alpha \left[\frac{\partial \boldsymbol{u_1}^{(\alpha)}}{\partial t} + \boldsymbol{u_0}^{(\alpha)} \cdot \nabla \boldsymbol{u_1}^{(\alpha)} \right] = q_\alpha \boldsymbol{E_1}$$

(3) Dans l'espace de Fourier l'équation du mouvement s'écrit $-im_\alpha \omega \boldsymbol{u_1}^{(\alpha)} + im_\alpha \left(\boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{u_0}^{(\alpha)}\right) \boldsymbol{u_1}^{(\alpha)} = q_\alpha \boldsymbol{E_1}$ ce qui donne :

$$\boldsymbol{u_1}^{(\alpha)} = \frac{iq_\alpha}{m_\alpha} \frac{\boldsymbol{E_1}}{\left[\omega - \boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{u_0}^{(\alpha)}\right]}$$

Et l'équation de continuité est donnée par $-i\omega n_1^{(\alpha)} + i n_0^{(\alpha)} \boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{u_1}^{(\alpha)} + i n_1^{(\alpha)} \boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{u_0}^{(\alpha)} = 0$, on a donc :

$$n_1^{(\alpha)} = n_0^{(\alpha)} \frac{\boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{u_1}^{(\alpha)}}{\left[\omega - \boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{u_0}^{(\alpha)}\right]} = \frac{iq_\alpha n_0^{(\alpha)}}{m_\alpha} \frac{\boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{E_1}}{\left[\omega - \boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{u_0}^{(\alpha)}\right]^2}$$

(4) L'équation de Poisson est $\varepsilon_0 \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{E_1} = \sum_\alpha q_\alpha n^{(\alpha)} = \sum_\alpha q_\alpha n_1^{(\alpha)}$ d'après l'hypothèse de neutralité globale. Dans l'espace de Fourier elle devient $i\boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{E_1} = \sum_\alpha q_\alpha n_1^{(\alpha)}$. En utilisant l'expression de $n_1^{(\alpha)}$ obtenue à la question précédente on a :

$$i\boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{E_1} = \sum_\alpha \frac{q_\alpha^2 n_0^{(\alpha)}}{\varepsilon_0 m_\alpha} \frac{\boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{E_1}}{\left[\omega - \boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{u_0}^{(\alpha)}\right]^2}$$

Cette équation admet une solution non triviale si :

$$\sum_\alpha \frac{\omega_{p\alpha}^2}{\left[\omega - \boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{u_0}^{(\alpha)}\right]^2} = 1$$

C'est la relation de dispersion du plasma pour une onde longitudinale en présence de courants à l'équilibre. S'il n'y pas de courant, les $\boldsymbol{u_0}^{(\alpha)}$ sont nuls et on trouve $\omega = \sum_\alpha \omega_{p\alpha}^2$, qui est la relation de dispersion classique pour les oscillations plasma (ondes de Langmuir).

B. Instabilité courant-plasma

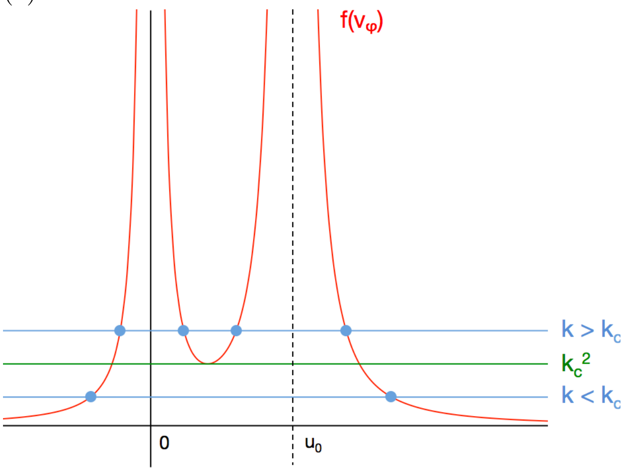
(1) Les ions ne possèdent pas de vitesse fluide $\boldsymbol{u_0}$ à l'équilibre, et la vitesse fluide $\boldsymbol{u_0}$ des électrons à l'équilibre est dans la même direction que les ondes que l'on considère, donc la relation de dispersion pour ce plasma devient :

$$\frac{\omega_{pi}^2}{\omega^2} + \frac{\omega_{pe}^2}{[\omega - ku_0]^2} = 1$$

Puisque les deux espèces de charge $+e$ et $-e$ ont la même densité n_0 à l'équilibre on peut remarquer que $\omega_{pi}^2 = \frac{m_e}{m_i}\omega_{pe}^2$. En posant $v_\varphi = \frac{\omega}{k}$ la relation de dispersion devient :

$$\omega_{pe}^2 \left[\frac{m_e/m_i}{v_\varphi^2} + \frac{1}{(v_\varphi - u_0)^2}\right] = f(v_\varphi) = k^2$$

(2)



La fonction f possède deux pôles en $v_\varphi = 0$ et $v_\varphi = u_0$.

On voit graphiquement qu'il existe une valeur critique du vecteur d'onde k_c telle que l'équation de dispersion admette :
- pour $k > k_c$: 4 solutions réelles
- pour $k < k_c$: 2 solutions réelles

Mais $\forall\, k$, l'équation de dispersion admet 4 racines dans $\mathbb{C}$. Pour $k < k_c$ il y a donc en plus des 2 solutions réelles, 2 solutions de la forme $v_{\varphi\pm} = \frac{\omega_r + i\gamma}{k}$ correspondant à une onde atténuée et une onde à croissance exponentielle (onde instable).

Pour calculer k_c, on cherche le minimum local de f : $f'(v_\varphi) = -2\omega_{pe}^2 \left[\frac{m_e/m_i}{v_\varphi^3} + \frac{1}{(v_\varphi - u_0)^3}\right]$ et on trouve $f'(v_\varphi) = 0$ pour $v_\varphi = v_c = \frac{u_0}{1 + (m_e/m_i)^{-1/3}}$.

Puis on calcule $f(v_c) = k_c^2 = \frac{\omega_{pe}^2}{u_0^2}\left(1 + \frac{m_e}{m_i}\right)^3$.

C. Instabilité à deux faisceaux

(1) On a cette fois deux courants d'électrons de densité $n_0/2$ dans des directions opposées. La relation de dispersion s'écrit, en notant $\omega_p = \frac{n_0 e^2}{m_e \varepsilon_0}$:

$$\frac{\omega_p^2}{2}\left[\frac{1}{(\omega - ku_0)^2} + \frac{1}{(\omega + ku_0)^2}\right]$$

(2) En développant l'équation de dispersion on arrive à :

$$\omega^4 - (k^2 u_0^2 + \omega_p^2)\omega^2 + (k^4 u_0^4 - \omega_p^2 k^2 u_0^2) = 0$$

ou encore en notant $\Omega = \omega^2$:

$$\Omega^2 - (k^2 u_0^2 + \omega_p^2)\Omega + (k^4 u_0^4 - \omega_p^2 k^2 u_0^2) = 0$$

Le discriminant de cette équation du second ordre vaut $\Delta = \omega_p^2(\omega_p^2 + 8k^2u_0^2) > 0$, l'équation admet donc deux solutions réelles $\Omega_\pm$ données par :

$$\Omega_\pm = \frac{1}{2}\left[\omega_p^2 + 2k^2u_0^2 \pm \sqrt{\omega_p^4 + 8\omega_p^2 k^2 u_0^2}\right]$$

On a donc clairement toujours $\Omega_+ > 0$, donc s'il existe une onde instable, c'est que $\Omega_- < 0$. On cherche alors les 2 racines imaginaires $\gamma = \sqrt{\Omega_-}$. On a $\gamma^2 = \frac{\omega_p^2}{2} + k^2u_0^2 - \sqrt{\omega_p^4 + 8k^2u_0^2\omega_p^2}$.

On pose $y^2 = \frac{2\omega^2}{\omega_p^2}$ et $x = \frac{2k^2u_0^2}{\omega_p^2}$, et on a alors $y^2 = 1 + x - \sqrt{1+4x}$.
On pose $y = iy'$ (puisque y est imaginaire pur) et on alors $y'^2 = \sqrt{1+4x} - (1+x)$ et on cherche à maximiser y' :

$$\frac{d(y'^2)}{dx} = 2(1+4x)^{-1/2} - 1$$

donc $\frac{d(y'^2)}{dx} = 0$ pour $x = 3/4$, donc y'^2 et donc y' sont maximum pour $x = 3/4$. On calcule alors $y'^2_{max} = 1/4$ donc $y'_{max} = 1/2$. On en déduit que :

$$\gamma_{max} = \frac{\omega_p}{\sqrt{2}} y'_{max} = \frac{\omega_p}{2\sqrt{2}}$$