PC4 Physique des plasmas

18/12/2014

Exercice 1 - Diffusion dans un plasma

A. Diffusion électronique libre

On s'intéresse tout d'abord au cas d'un plasma faiblement ionisé, et on considère que les particules neutres et les ions, beaucoup plus lourds que les électrons, restent immobiles. On traitera le plasma comme un milieu diélectrique et on étudie le mouvement des électrons dans le cadre d'une modélisation fluide de ces derniers. Une modélisation simple de l'effet des collisions sur le fluide électronique permet d'exprimer la force résultante sur un élément fluide comme :

$$\boldsymbol{F}_{\text{coll}} = -\nu_c m_e \boldsymbol{u_e}$$

où ν_c représente une fréquence de collision effective et $\boldsymbol{u_e}$ la vitesse moyenne de l'élément fluide.

(1) Écrivez l'équation du mouvement fluide pour les électrons du plasma en présence d'un champ électromagnétique $\{\boldsymbol{E}, \boldsymbol{B}\}$.
(2) Résolvez cette équation dans le cas d'un plasma froid sans champ électromagnétique. Que représente ν_c ?

On suppose maintenant que le champ électromagnétique est toujours nul, mais que le plasma n'est plus froid et possède une température électronique T_e constante. On suppose de plus qu'il existe une faible perturbation de densité électronique. Ceci implique notamment que la distribution de vitesse des électrons reste approximativement isotrope, et donc qu'on peut remplacer le tenseur de pression par la pression scalaire $p_e = n_e k_B T_e$.

(3) En posant $n_e(\boldsymbol{r}, t) = n_0 + n'_e(\boldsymbol{r}, t)$, linéarisez l'équation du mouvement et l'équation de continuité pour les électrons.
(4) Déduisez-en l'équation d'évolution de n'_e. On posera $D_e = \dfrac{k_B T_e}{m_e \nu_c}$.
(5) On note τ et ℓ les échelles temporelle et spatiale de variation de n'_e. Montrez que si la fréquence de collision est suffisamment grande, cette équation se simplifie en :

$$\frac{\partial n'_e}{\partial t} = D_e \nabla^2 n'_e$$

De quel type d'équation s'agit-il ?
(6) Réécrivez l'équation du mouvement linéarisée en supposant une grande fréquence de collision, et déduisez-en le flux électronique $\boldsymbol{\Gamma_e} = n_0 \boldsymbol{u_e}$.

On applique maintenant un champ magnétique uniforme B_0 orienté selon $\hat{\boldsymbol{z}}$.

(7) En suivant la même méthode que précédemment, avec les mêmes hypothèses, trouvez une relation liant le flux électronique $\boldsymbol{\Gamma_e}$ au gradient de densité et au champ magnétique.
(8) Déduisez-en que le flux électronique est lié au gradient de densité par une relation linéaire de type $\boldsymbol{\Gamma_e} = \mathcal{D}\,\boldsymbol{\nabla} n'_e$ où $\mathcal{D}$ est un tenseur d'ordre 2.
(9) Que devient l'équation d'évolution de la densité électronique ? Dans quelle direction s'effectue préférentiellement la diffusion des électrons ?

B. Diffusion ambipolaire

Nous avons établi dans la première partie qu'en l'absence de champ électromagnétique et pour un plasma de température constante, il existe un flux électronique de type diffusif $\boldsymbol{\Gamma_e} = -D_e \boldsymbol{\nabla} n'_e$. On pourrait de même établir l'expression du flux ionique $\boldsymbol{\Gamma_i} = -D_i \boldsymbol{\nabla} n'_i$. Pour établir ces expressions, nous n'avons pas tenu compte des interactions entre ions et électrons. Ce phénomène de diffusion est appelé diffusion libre.

(1) En pratique, que va-t-il se passer dans un plasma non magnétisé si seuls les électrons diffusent ?
(2) On note ℓ la longueur caractéristique de variation de densité électronique. À l'aide de l'équation de Poisson, estimez en fonction de ℓ la force F_E exercée sur un élément de fluide électronique par les ions. Comparez à la force F_D due au gradient de densité. À quelle condition peut-on négliger f_E ?
(3) Écrivez les équations de continuité et du mouvement pour chaque espèce en faisant apparaître le champ de charge d'espace $\boldsymbol{E}$.
(4) En suivant la même méthode qu'à la partie précédente, linéarisez ces équations, puis déduisez-en un système d'équations couplées décrivant l'évolution temporelle de n'_e et n'_i. On considèrera une nouvelle fois que les fréquences de collision effective avec les particules neutres sont grandes.
(5) On suppose que $n'_e = n'_i = n'$. Montrez que l'évolution de n' est régie par l'équation :

$$\frac{\partial n'}{\partial t} = D_a \nabla^2 n'$$

Ce phénomène de diffusion est appelé diffusion ambipolaire parfaite. Justifiez brièvement cette appellation.
(6) Que se passe-t-il si au lieu de supposer que $n'_i = n'_e$, on pose $n'_i = \alpha n'_e$?

Exercice 2 - Instabilités de courant dans un plasma

A. Relation de dispersion en présence de courants de particules

On va s'intéresser ici à un plasma présentant des courants de particules. Autrement dit, dans le cadre d'une modélisation multi-fluide, certaines espèces de particules chargées α possèdent à l'équilibre une vitesse fluide notée $\boldsymbol{u}_0^{(\alpha)}$. On s'intéresse à l'existence d'ondes harmoniques dans un tel plasma. Pour simplifier les calculs, on suppose que le plasma est froid, initialement non magnétisé, et on se place dans le cadre d'un traitement perturbatif.
Ainsi, pour chaque espèce α la densité et la vitesse moyenne fluide sont données par :

$$\begin{aligned} n^{(\alpha)} &= n_0^{(\alpha)} + n_1^{(\alpha)} \\ \boldsymbol{u}^{(\alpha)} &= \boldsymbol{u}_0^{(\alpha)} + \boldsymbol{u}_1^{(\alpha)} \end{aligned}$$

Et le champ électromagnétique est donné par :

$$\begin{aligned} \boldsymbol{E} &= \boldsymbol{E}_1 \\ \boldsymbol{B} &= \boldsymbol{B}_1 \end{aligned}$$

où tous les termes d'indice 1 sont du premier ordre.

(1) On considère une perturbation du plasma par une onde longitudinale. Que vaut $\boldsymbol{B}_1$?
(2) Linéarisez les équations du mouvement et de continuité pour chaque espèce du plasma.
(3) Si toutes les grandeurs perturbées varient en $e^{i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-\omega t)}$, exprimez pour une espèce donnée la densité et la vitesse moyenne perturbées par l'onde longitudinale en fonction du champ électrique.
(4) En utilisant l'équation de Poisson, exprimez la relation de dispersion pour une onde longitudinale dans un tel plasma. Que devient-elle si les courants de particules sont nuls ?

B. Instabilité courant-plasma

Pour simplifier le problème, on considère un plasma froid non magnétisé de densité n_0 constitué d'ions de charge e et d'électrons. Il existe à l'équilibre un courant d'électrons $\boldsymbol{u}_0$. On s'intéresse aux ondes longitudinales dans la même direction que le courant d'électrons.

(1) Montrez que la relation de dispersion des ondes longitudinales peut s'écrire :

$$f(v_\varphi) = k^2 \qquad \text{avec} \qquad f(v_\varphi) = \omega_{pe}^2 \left[\frac{m_e/m_i}{v_\varphi^2} + \frac{1}{(v_\varphi - u_0)^2} \right]$$

(2) Tracez l'allure de $f(v_\varphi)$. Déduisez-en qu'il existe une valeur critique du vecteur d'onde k_c en dessous de laquelle une onde croissant exponentiellement existe dans le plasma. Calculez k_c.

C. Instabilité à deux faisceaux

On considère cette fois deux courants d'électrons contre-propagatifs à la vitesse u_0 dans un plasma de densité n_0 dont les ions sont supposés immobiles. Chaque courant d'électrons a une densité $n_0/2$.
(1) Quelle est la relation de dispersion pour les ondes longitudinales ?
(2) Calculez le taux de croissance maximal de l'instabilité : cherchez la solution $\omega = i\gamma$ de l'équation de dispersion qui implique une croissance exponentielle, et maximisez γ par rapport au paramètre ku_0. Pour plus de simplicité, on pourra poser $x = \dfrac{2k^2u_0^2}{\omega_p^2}$ et $y^2 = \dfrac{2\omega^2}{\omega_p^2}$ et maximiser y^2 par rapport à x.