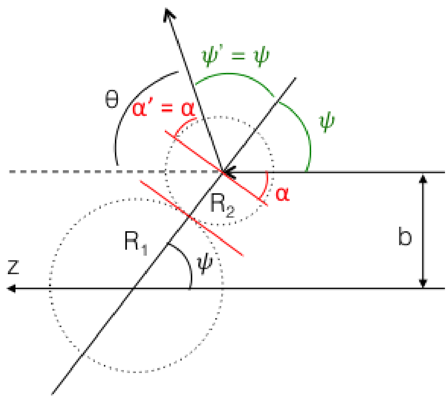
PC3 Physique des plasmas

11/12/2014

Exercice 1

On s'intéresse à la collision de type "boule de billard" d'une sphère de rayon R_1 incidente sur une sphère de rayon R_2. C'est une collision élastique, la quantité de mouvement est donc conservée. On a donc $|\boldsymbol{v}|$ qui est constant, même si la direction du vecteur vitesse change.



(a) Une collision de ce type est équivalente à une réflexion spéculaire (*i.e.* parfaite) par un miroir matérialisé par la tangente aux deux sphères. Pour cette réflexion, l'angle d'incidence est égal à l'angle de réflexion, soit ici $\alpha' = \alpha$. On voit bien que si cet angle est mesuré par rapport à la normale au "miroir", on a $\psi' = \psi$, et donc $\pi = \psi + \psi' + \theta = 2\psi + \theta$, ou encore :

$$\psi = \frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2}$$

On a de plus $\sin\psi = b/(R_1 + R_2)$ donc $b = D\sin\psi$ ou encore :

$$b = D\cos\frac{\theta}{2}$$

(b) Par définition on a $d^2N = \Phi dt \frac{d\sigma}{d\Omega} d\Omega$. Puisque le problème ne dépend que de θ, on peut intégrer sur ϕ (2^{e} coordonnée angulaire de l'espace ; attention, ici θ et ϕ sont inversées par rapport aux coordonnées sphériques habituelles.). $d\Omega = \sin\theta d\theta d\phi$ et ϕ varie de 0 à 2π donc $d^2N = 2\pi\Phi dt \frac{d\sigma}{d\Omega} d\theta$. Les particules diffusées dans u angle entre θ et $\theta + d\theta$ sont celles situées dans la couronne d'épaisseur db limitée par les cercles de rayons b et $b + db$. Cette couronne a une surface égale à $d(\pi b^2) = 2\pi b db$. On a donc $d^2N = \Phi dt 2\pi b db$. En substituant, on arrive à :

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{b}{\sin\theta}\frac{db}{d\theta}$$

Et comme $\frac{db}{d\theta} = -\frac{D}{2}\sin\frac{\theta}{2}$ il vient :

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{D^2}{4} \qquad \text{(Comme } \frac{d\sigma}{d\Omega} \text{ représente une surface, on la prend toujours } > 0\text{)}$$

(c) Pour la section efficace totale, on intègre sur tous les angles :

$$\sigma = \int \frac{d\sigma}{d\Omega} d\Omega = \frac{D^2}{4}\int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\pi} \sin\theta d\theta = \pi D^2$$

(d) Avant diffusion $p_z = p$ et après diffusion $p'_z = p'\cos\theta = p\cos\theta$ puisque la collision est élastique. Donc $\Delta p_z = p(\cos\theta - 1)$.

Pour un flux de particules incidentes Φ on a pendant dt : $d^2p_z = p(\cos\theta - 1)\Phi dt \dfrac{d\sigma}{d\Omega} d\Omega$ et donc :

$$\frac{dp_z}{dt} = \Phi p \int_\Omega (\cos\theta - 1)\frac{d\sigma}{d\Omega} d\Omega = 2\pi\Phi p \int_0^\pi \frac{D^2}{4}(\cos\theta - 1)\sin\theta d\theta = p\frac{\pi D^2}{2}\Phi$$

(e) Les particule incidentes sont des électrons de vitesse v_e, de masse m_e et de rayon nul. On a $\Phi = n_0 v_e$ donc :

$$\frac{dp_z}{dt} = p\frac{n_0 v_e \pi R_0^2}{2} = \frac{p}{\tau} \qquad \text{avec } \tau = \frac{2}{n_0 v_e \pi R_0^2}$$

Pour évaluer τ on prend $v_e = v_{th} = \sqrt{k_B T_e/m_e}$ la vitesse thermique. Alors

$$\tau = n_0 \frac{\pi R_0^2}{2}\sqrt{\frac{k_B T_e}{m_e}}$$

et la fréquence de collisions est donnée par $\nu = 1/\tau$ et le libre parcours moyen par $\ell = v_{th}\tau$

Exercice 2

Vlasov : $\dfrac{\partial f}{\partial t} + \boldsymbol{v}\cdot\dfrac{\partial f}{\partial \boldsymbol{r}} + \boldsymbol{a}\cdot\dfrac{\partial f}{\partial \boldsymbol{v}} = 0.$

Cette équation peut se reécrire $\dfrac{\partial f}{\partial t} + \displaystyle\sum_{i=1}^{3} v_i \dfrac{\partial f}{\partial x_i} + \displaystyle\sum_{i=1}^{3} a_i \dfrac{\partial f}{\partial v_i} = 0.$

Si on note $\boldsymbol{X}$ le vecteur position dans l'espace des phases, on a $\boldsymbol{X} = (x_1, x_2, x_3, v_1, v_2, v_3)$, la vitesse vaut $\dot{\boldsymbol{X}} = (v_1, v_2, v_3, a_1, a_2, a_3)$ et le vecteur gradient vaut $\partial/\partial\boldsymbol{X} = (\partial/\partial x_1, \partial/\partial x_2, \partial/\partial x_3, \partial/\partial v_1, \partial/\partial v_2, \partial/\partial v_3)$.

L'équation de Vlasov peut alors s'écrire $\dfrac{\partial f}{\partial t} + \displaystyle\sum_{i=1}^{6} \dot{X}_i \dfrac{\partial f}{\partial X_i} = 0$ ou encore $\dfrac{\partial f}{\partial t} + \dot{\boldsymbol{X}}\cdot\dfrac{\partial f}{\partial \boldsymbol{X}} = 0$. Comme les coordonnées d'espace et de vitesses sont indépendantes, on peut rentrer la vitesse $\dot{\boldsymbol{X}}$ dans le gradient et l'équation devient :

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{X}}\cdot\left(f\dot{\boldsymbol{X}}\right) = 0$$

Ce n'est pas étonnant puisque l'équation de Vlasov traduit simplement la conservation du volume élémentaire $f(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{v}, t)d^3r d^3v$, qui représente le nombre de particules de vitesse entre $\boldsymbol{v}$ et $\boldsymbol{v} + \boldsymbol{dv}$ et à la position entre $\boldsymbol{r}$ et $\boldsymbol{r} + \boldsymbol{dr}$, pendant l'évolution temporelle du système.

Exercice 3

(a) $\dfrac{\partial f}{\partial v_i} = \dfrac{\partial f}{\partial v}\dfrac{\partial v}{\partial v_i}$ et $v = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}$ donc $\dfrac{\partial v}{\partial v_i} = \dfrac{v_i}{v}$ et donc $\dfrac{\partial f}{\partial v_i} = \dfrac{\partial f}{\partial v}\dfrac{v_i}{v}$ ou $\dfrac{\partial f}{\partial \boldsymbol{v}} = \dfrac{\partial f}{\partial v}\dfrac{\boldsymbol{v}}{v}$.
L'équation de Vlasov devient alors, en utilisant aussi $\boldsymbol{a} = \dfrac{\boldsymbol{F}}{m} = -\dfrac{1}{m}\dfrac{\partial \phi}{\partial \boldsymbol{r}}$:

$$\boldsymbol{v}\cdot\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{r}} = \frac{1}{mv}\frac{\partial f}{\partial v}\boldsymbol{v}\cdot\frac{\partial \phi}{\partial \boldsymbol{r}}$$

(b) Si $f = g(v)h(\phi)$ alors $\dfrac{\partial f}{\partial \boldsymbol{r}} = gh'\dfrac{\partial \phi}{\partial \boldsymbol{r}}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial v} = g'h$. L'équation de Vlasov devient alors :

$$\boldsymbol{v}\cdot\frac{\partial \phi}{\partial \boldsymbol{r}}\left[gh' - \frac{h}{mv}g'\right] = 0$$

donc $gh' - \dfrac{h}{mv} g = 0$ ou encore :

$$\frac{h'}{h} = \frac{1}{mv}\frac{g'}{g}$$

(c) $\dfrac{h'}{h} = \dfrac{1}{mv}\dfrac{g'}{g} = C$, constante indépendante de ϕ ou v. On en déduit facilement $h \propto \exp C\phi$, et pour g, pour se débarrasser du $1/v$, on pose $G(v^2) = g(v)$. On a donc $g' = 2vG'$ et l'équation sur g devient l'équation sur G suivante : $\dfrac{2}{m}\dfrac{G'}{G} = C$. On en déduit $G(v^2) \propto \exp(C\frac{1}{2}mv^2)$.

(d) $f \propto \exp(C\frac{1}{2}mv^2)$ et comme f est une fonction de distribution, elle doit tendre vers 0 pour une vitesse infiniment grande, donc $C < 0$. On voit également que C a la dimension de l'inverse d'une énergie. On peut donc prendre l'énergie thermique k_BT, soit $C = -1/k_BT$ (même si rien ne nous le suggère dans l'énoncé).

(e) On doit avoir $\int g(v)d^3v = n_0$ (par définition) donc :

$$n_0 = A \iiint \exp\left(-\frac{m(v_x^2+v_y^2+v_z^2)}{2k_BT}\right) dv_x dv_y dv_z = A\left[\iiint \exp\left(-\frac{mv_x^2}{2k_BT}dv_x\right)\right]^3 = A\left(\frac{2\pi k_BT}{m}\right)^{\frac{3}{2}}$$

Puis $n(\boldsymbol{r}) = \displaystyle\iiint f(\boldsymbol{r},\boldsymbol{v})d^3v$ donc $n(\boldsymbol{r}) = n_0 \exp\left(-\dfrac{\phi(r)}{k_BT}\right)$.

(f) $\langle \boldsymbol{v} \rangle = 0$ car f est isotrope. Pour s'en convaincre, on peut calculer $\langle v_x \rangle$: l'intégration selon v_y et v_z se passe sans problème, mais la fonction à intégrer selon v_x est impaire, donc son intégrale est nulle sur l'ensemble des réels.

Pour calculer $\langle v \rangle$, on fait un changement de variables $(v_x, v_y, v_z) \to (v, \theta, \phi)$, l'élément d'intégration est $d^3v = v^2 \sin\phi dv d\theta d\phi$. v varie de 0 à $+\infty$, θ de 0 à 2π et ϕ de 0 à π. Il y a encore à faire une intégration par parties pour calculer l'intégrale sur v, et on arrive à, en omettant la dépendance en $\boldsymbol{r}$:

$$\langle v \rangle = \sqrt{\frac{8k_BT}{m}}$$

Pour calculer v_m, vitesse la plus probable, il faut calculer la loi de probabilité $P(v)$ (qui est donc différente de $f(v)$ puisque f représente la densité de probabilité de $\boldsymbol{v}$). $P(v)dv$ est le nombre de particules dont le module de la vitesse est entre v et $v+dv$. C'est donc le volume de la calotte sphérique de rayon v et d'épaisseur dv. cela revient également à intégrer $f(\boldsymbol{v})d^3v$ selon les coordonnées angulaires dans l'espace des vitesses : $P(v)dv = \displaystyle\iint_{\theta,\phi} f(\boldsymbol{v})v^2 \sin\phi dv d\theta d\phi = 4\pi v^2 f(v)dv$.

On a donc $P(v) = 4\pi v^2 g(v)$, on omet la dépendance en $\boldsymbol{r}$. On trouve $\dfrac{dP}{dv} \propto \left(2 - \dfrac{mv^2}{k_BT}\right)$, donc $P(v)$ est maximale pour $v = v_m = \sqrt{\dfrac{2k_BT}{m}}$.

Exercice 4

(a) Pour calculer C, on normalise f : $\displaystyle\iiint f(\boldsymbol{v})d^3v = n_0$. On trouve $C = n_0\left(\dfrac{m}{2\pi k_BT_\perp}\right)\left(\dfrac{m}{2\pi k_BT_\parallel}\right)^{\frac{1}{2}}$.

(b) Pour calculer $W_\parallel = \frac{1}{2}m\langle v_z^2\rangle$ et $W_\perp = \frac{1}{2}m\langle v_x^2\rangle + \frac{1}{2}m\langle v_y^2\rangle$, il y a une intégration par parties à faire. On trouve $W_\parallel = \frac{1}{2}k_BT$ et $W_\perp = k_BT$.

Le tenseur de pression est défini par $\bar{\bar{P}} = mn_0\langle(\boldsymbol{v}-\boldsymbol{u})(\boldsymbol{v}-\boldsymbol{u})\rangle$ où $\boldsymbol{u} = \langle \boldsymbol{v} \rangle$. Ici on a une vitesse moyenne nulle donc $\bar{\bar{P}} = mn_0\langle \boldsymbol{v}\boldsymbol{v}\rangle$. Attention, c'est un produit tensoriel... Les composantes sont données par $P_{ij} = mn_0 \langle v_i v_j \rangle$. On voit alors que $P_{zz} = mn_0 \left\langle v_z^2 \right\rangle = 2n_0 W_\parallel = n_0 k_B T_\parallel$. De même, $P_{xx} = P_{yy} = n_0 W_\perp = n_0 k_B T_\perp$. Vous pouvez vérifier que, comme f est séparable selon les v_i, tous les autres termes sont nuls.

Exercice 5

(a) Ici, pas de difficulté particulière. Il faut calculer $\boldsymbol{F} = q_\alpha \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}$ avec $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{A} = \dfrac{dA}{dx}\hat{\boldsymbol{u}}_{\boldsymbol{z}}$, et l'injecter dans l'équation de Vlasov. On calcule $\dfrac{\boldsymbol{F}}{m_\alpha} \cdot \dfrac{\partial f}{\partial \boldsymbol{v}} = -\dfrac{q_\alpha v_x u_\alpha}{k_B T}\dfrac{dA}{dx} f$ et $\boldsymbol{v} \cdot \dfrac{\partial f}{\partial \boldsymbol{r}} = \dfrac{q_\alpha v_x u_\alpha}{k_B T}\dfrac{dA}{dx} f$ donc f est bien solution de l'équation de Vlasov.

(b) $\boldsymbol{j} = n(\boldsymbol{r}) q_\alpha \langle \boldsymbol{v} \rangle$. Ici $\langle \boldsymbol{v} \rangle$ n'est pas nulle, on voit d'après la forme de f que $\langle \boldsymbol{v} \rangle = u_\alpha \hat{\boldsymbol{u}}_{\boldsymbol{y}}$, et ça se vérifie très bien par le calcul. On a donc :

$$j = q_\alpha u_\alpha n_0 \exp\left[\frac{q_\alpha u_\alpha A(x)}{k_B T}\right]$$

Pour le tenseur de pression, tous les termes P_{ij} avec $j \neq i$ sont nuls, et en faisant le changement de variable $v'_y = v_y - u_\alpha$ on voit que $P_{yy} = P_{xx} = P_{zz} = mn(\boldsymbol{r}) \left\langle v_x^2 \right\rangle$. On calcule :

$$P = n_0 k_B T \exp\left[\frac{q_\alpha u_\alpha A(x)}{k_B T}\right]$$

Et on a bien $j = \dfrac{dP}{dA}$