PC2 Physique des plasmas

04/12/2014

Exercice 1

(a) $\frac{d}{dt}\left(W_\perp + W_\parallel\right) = 0$ donc $\frac{dW_\perp}{dt} = -\frac{dW_\parallel}{dt}$, et donc $\frac{dW_\perp}{dt} = -\frac{\nu}{3}\left(W_\perp - 2W_\parallel\right)$ et $\frac{dW_\parallel}{dt} = +\frac{\nu}{3}\left(W_\perp - 2W_\parallel\right)$

(b-i) Le champ magnétique ne travaille pas, mais sa variation temporelle induit un champ électrique. Donc

$$\delta W = \boldsymbol{F}_L \cdot \boldsymbol{v} dt = -e\boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{v} dt$$

(b-ii) $\Delta W = -e \int_{\frac{2\pi}{\omega_c}} \boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{v} dt.$

Si le champ est lentement variable, on peut considérer que l'orbite cyclotronique n'est pas perturbée. En négligeant la composante parallèle de la vitesse de l'électron, on peut alors remplacer l'intégrale sur le temps par une intégrale sur la trajectoire circulaire fermée. Alors $\Delta W = -e \int_{\frac{2\pi}{\omega_c}} \boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{v}_\perp dt = -e \oint \boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{d\ell}$.

Donc d'après le théorème de Stokes $\Delta W = -e \iint \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{dS}$ et grâce à l'équation de Maxwell-Faraday $\Delta W = e \iint \dot{\boldsymbol{B}} \cdot \boldsymbol{dS}$. On a $S = \pi r_L^2$ où $r_L = \frac{v_\perp}{\omega_c} = \frac{mv_\perp}{eB}$, et on arrive à :

$$\Delta W = \frac{\frac{1}{2}mv_\perp^2}{B} \frac{2\pi}{\omega_c} \dot{B} = \mu \Delta B$$

(b-ii) On a $W = W_\perp = \mu B$ donc $\Delta W = \Delta(\mu B)$. On a donc d'après l'équation précédente $\Delta\mu = 0$.

(c) On doit tenir compte de l'énergie d'interaction du moment magnétique avec le champ B, soit μB. Alors :

$$\frac{dW_\perp}{dt} = -\frac{\nu}{3}\left(W_\perp - 2W_\parallel\right) + \mu \dot{B}$$

(d) $G = \frac{W_\perp^2 W_\parallel}{B^2}$ donc $\dot{G} = 2W_\perp \dot{W}_\perp \frac{W_\parallel}{B^2} + \frac{W_\perp^2}{B^2}\dot{W}_\parallel - \frac{2}{B^3} W_\perp^2 W_\parallel \dot{B}$. En utilisant le résultat de la question précédente et le fait que $W_\perp = \mu B$, on arrive à :

$$\dot{G} = \frac{\nu}{3}(W_\perp - 2W_\parallel)^2 \frac{W_\perp}{B^2}$$

(e) On a clairement $\dot{G} > 0$ donc G croît avec le temps. Or $G = \mu^2 W_\parallel$ et comme μ est constant, l'énergie parallèle augmente. On donc un chauffage des électrons dans la direction parallèle au champ magnétique.

Exercice 2

(a) La distribution de charges est invariante selon θ et z donc $\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}(r)$. Les plans $\perp z$ et $\perp \theta$ sont plans de symétrie, donc $\boldsymbol{E}(r) = E(r)\boldsymbol{\hat{u}_r}$. À partir de là, on peut utiliser la forme locale de l'équation de Maxwell-Gauss, ou sa forme intégrale (théorème de Gauss) $\oiint_\Sigma \boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{d\Sigma} = \dfrac{Q_\Sigma}{\varepsilon_0}$.
Localement, on a $\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{E} = \rho/\varepsilon_0$, soit $\dfrac{1}{r}\dfrac{d(rE)}{dr} = -\dfrac{en}{\varepsilon_0}$ et donc $E(r) = -\dfrac{enr}{2\varepsilon_0}$ avec $E(0) = 0$.
En utilisant le théorème de Gauss et en choisissant comme surface un cylindre de rayon r et de hauteur h on a $2\pi rhE(r) = -\dfrac{en\pi r^2 h}{\varepsilon_0}$ et donc $E(r) = -\dfrac{enr}{2\varepsilon_0}$.

On a de même $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{B}(r)$. Les plans $\perp z$ sont plans d'antisymétrie de la distribution de courant et les plans $\perp \theta$ sont plans de symétrie, donc $\boldsymbol{B}(r) = B(r)\boldsymbol{\hat{u}_\theta}$.
Localement, on a $\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{B} = -\mu_0 en\boldsymbol{v}$ soit $\dfrac{1}{r}\dfrac{d(rB)}{dr} = -\mu_0 env$ donc $B(r) = -\dfrac{\mu_0}{2}nev$.
En utilisant le théorème d'Ampère $\oint_C \boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{d\ell} = \mu_0 I_C$ et en choisissant comme contour un cercle de rayon r on a $2\pi rB(r) = -\mu_0 nev\pi r^2$ et donc $B(r) = -\dfrac{\mu_0}{2}nev$.

(b) $\boldsymbol{F}_L = -e\boldsymbol{E}(r) - e\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B}(r)$ donc $\boldsymbol{F}_L = -m\dfrac{\omega_p^2}{2}r\boldsymbol{\hat{u}_r} - \mu_0\varepsilon_0 v^2\dfrac{\omega_p^2}{2}\boldsymbol{\hat{u}_z}\times\boldsymbol{\hat{u}_\theta}$ soit $\boldsymbol{F}_L = \dfrac{\omega_p^2}{2}\left(1 - \dfrac{v^2}{c^2}\right)r\boldsymbol{\hat{u}_r}$.
La force électrique tend à expulser les électrons du faisceau. Elle est compensée par la force magnétique pour $v = c$.

(c) Dans un repère cartésien (x, y, z), on a :

$$\begin{aligned}\ddot{x} &= \frac{\omega_p^2}{2}x - \omega_c\dot{y}\\ \ddot{y} &= \frac{\omega_p^2}{2}y + \omega_c\dot{x}\\ \ddot{z} &= 0\end{aligned}$$

avec $\omega_c = \dfrac{eB}{m}$. On en déduit que $\dot{z} = \mathrm{c^{te}} = v$. On pose $\xi = x + iy$. L'équation vérifée par ξ est alors :

$$\ddot{\xi} = \frac{\omega_p^2}{2}\xi + i\omega_c\dot{\xi}$$

(d) On cherche une solution sous la forme $\xi(t) = \xi_0 e^{i\omega t}$ qu'on injecte dans l'équation précédente :

$$-\omega^2 = \frac{\omega_p^2}{2} - \omega_c\omega$$

Qu'on peut réécrire :

$$\omega^2 - \omega_c\omega + \frac{\omega_p^2}{2} = 0$$

Le déterminant de cette équation vaut $\omega_c^2 - 2\omega_p^2$, on a donc deux solutions $\omega_\pm = \dfrac{\omega_c \pm \sqrt{\omega_c^2 - 2\omega_p^2}}{2}$.
si $\omega_c < \sqrt{2}\omega_p$: $\xi(t)$ est de la forme $\xi_+ e^{i\omega_+ t} + \xi_- e^{i\omega_+ t}$ avec $\omega_\pm = \dfrac{1}{2}\left(\omega_c \pm i\sqrt{\omega_c^2 - 2\omega_p^2}\right)$. On a donc :

$$\xi(t) = \left[\xi_+ e^{-\frac{t}{2}\sqrt{2\omega_p^2 - \omega_c^2}} + \xi_- e^{+\frac{t}{2}\sqrt{2\omega_p^2 - \omega_c^2}}\right] e^{i\frac{\omega_c}{2}t}$$

Le terme en ξ_- diverge, donc le faisceau éclate.

si $\omega_c > \sqrt{2}\omega_p$: Alors $\xi(t)$ est de la forme :

$$\xi(t) = \left[\xi_+ e^{i\frac{t}{2}\sqrt{2\omega_p^2 - \omega_c^2}} + \xi_- e^{-i\frac{t}{2}\sqrt{2\omega_p^2 - \omega_c^2}} \right] e^{i\frac{\omega_c}{2}t}$$

Le faisceau est alors stable.

(e) L'orbite d'un électron est composée de deux rotations : l'électron tourne autour d'un centre guide lui-même en rotation autour de l'axe du faisceau. On aurait pu arriver à ce résultat plus rapidement, du moins qualitativement. Le mouvement des électrons est du à un champ magnétique uniforme, qui induit donc dans un plan perpendiculaire à $\boldsymbol{B}$ une rotation de Larmor autour d'un centre guide fixe, auquel se superpose un champ électrique radial accélérateur. Le champ électrique va donc créer une dérive des électrons vers la direction donnée par $\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{B}$. La formule vue dans le cours $\boldsymbol{v_E} = \frac{\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{B}}{B^2}$ est valable pour un champ électrique uniforme, mais également pour un champ variant linéairement. On pourrait montrer que lorsque ce n'est pas le cas, elle s'écrit $\boldsymbol{v_E} = \left(1 + \frac{r_L^2}{4}\nabla^2\right)\frac{\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{B}}{B^2}$ et fait donc intervenir la dérivée seconde de $\boldsymbol{E}$. La raison physique derrière cela est que, sur son orbite de Larmor, l'électron passe autant de temps dans les zones de E fort que dans celles de E faible, et donc la dérive globale supplémentaire due à l'inhomogénéité de E est nulle.

On a donc une vitesse de dérive orthoradiale qui implique une rotation des centre guides des électrons autour de l'axe du cylindre.

Exercice 3

(a) La dérive de gradient est donnée par $v_{\nabla B} = \frac{1}{2}v_\perp r_L \frac{\nabla B}{B}$. On peut déduire $v_\perp$ de l'énergie des particules $W = \frac{1}{2}mv_\perp^2$. Et $r_L = \frac{v_\perp}{\omega_c}$ avec $\omega_c = \frac{eB}{m}$.
On arrive alors à l'expression $v_{\nabla B} = \frac{W}{eB}\left|\frac{\nabla B}{B}\right|$.

Dans le plan équatorial, le champ B est de la forme $B(r) = B_0\left(\frac{R_0}{r}\right)^3$, avec $B_0 = 3\times 10^{-5}\,\mathrm{T}$. On a donc $\nabla B = -3B_0\frac{R_0^3}{r^4}$ et donc $\left|\frac{\nabla B}{B}\right| = \frac{3}{r}$. On a alors $v_{\nabla B} = \frac{3W_{[eV]}}{B_0 R_0^3}r^2$. Comme ici $r = 5R_0$ il vient :

$$v_{\nabla B} = \frac{75W_{[eV]}}{B_0 R_0}$$

Avec $R_0 \simeq 6\times 10^6\,\mathrm{m}$, on trouve pour les électrons $v_{\nabla B}^e \simeq 1.3\times 10^4\,\mathrm{m/s}$ et pour les protons $v_{\nabla B}^i \simeq 0.42\,\mathrm{m/s}$.

(b) Sous forme vectorielle, la vitesse de dérive est donnée par $\boldsymbol{v}_{\nabla B} = \mp\frac{1}{2}v_\perp r_L \frac{\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{\nabla B}}{B^2}$ et dépend du signe de la charge. On se place dans un système de coordonnées sphériques (r,θ,ϕ) tel que $\hat{\boldsymbol{r}}$ soit vers l'extérieur, $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ vers le nord et $\hat{\boldsymbol{\phi}}$ vers l'ouest. $\boldsymbol{B}$ est alors orienté selon $-\hat{\boldsymbol{\theta}}$ et $\boldsymbol{\nabla B}$ selon $-\hat{\boldsymbol{r}}$. $\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{\nabla B}$ est donc orienté selon $-\hat{\boldsymbol{\phi}}$, donc vers l'est. Les électrons dérivent dans le même sens que $\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{\nabla B}$, donc vers l'est, et les protons vers l'ouest.

(c) Pour faire le tour de la Terre, la distance à parcourir est $L = 2\pi \times 5R_0$. Un électron mettra environ 4 h et un proton 14 ans.

(d) La densité de courant est donnée par $j = nev_{\nabla B}$, on peut donc négliger le courant dû aux protons. On trouve $j = 2\times 10^{-8}\,\mathrm{A/m^2}$.

Exercice 4

A/
(a) Comme la divergence de $\boldsymbol{B}$ est toujours nulle, il existe une composante radiale du champ. On peut la calculer en écrivant $\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{B} = 0$ en coordonnées cylindriques :

$$\frac{1}{r}\frac{\partial rB_r}{\partial r} + \frac{\partial B_z}{\partial z} = 0$$

Puisque $\dfrac{\partial B_z}{\partial z}$ ne dépend pas de r on a donc :

$$B_r = -\frac{r}{2}\frac{\partial B_z}{\partial z}$$

(b) La force de Lorentz due à ce champ s'écrit :

$$\boldsymbol{F} = qv_\theta B_z \hat{\boldsymbol{u}}_{\boldsymbol{r}} + q\left[-v_r B_z + v_z B_r\right]\hat{\boldsymbol{u}}_{\boldsymbol{\theta}} - qv_\theta B_r \hat{\boldsymbol{u}}_{\boldsymbol{z}}$$

On a donc $F_\theta = -q\left[v_r B_z + \dfrac{r}{2}\dfrac{\partial B_z}{\partial z}\right]$. Le $2^{\text{ème}}$ terme s'annule le long de l'axe, et traduit simplement le fait que le centre guide des particules suit les lignes de champ sinon. Les composantes F_r et F_θ traduisent le mouvement de rotation de Larmor. Il reste donc une composante longitudinale de F donnée par :

$$F_z = \frac{q}{2}v_\theta r\frac{\partial B_z}{\partial z}$$

Calculons la moyenne de F_z sur une rotation. Pour simplifier, on considère que le centre guide reste sur l'axe. On a alors $v_\theta = \mp v_\perp$ constante (et dépend du signe de q) et $r = r_L$. On a donc :

$$\langle F_z\rangle = \mp\frac{q}{2}v_\perp r_L\frac{\partial B_z}{\partial z} = -\frac{1}{2}mv_\perp\frac{1}{B_z}\frac{\partial B_z}{\partial z}$$

Et d'après l'expression du moment magnétique crée par la particule en rotation, on a :

$$F_z = -\mu\frac{\partial B_z}{\partial z}$$

(c) L'équation du mouvement dans la direction parallèle à $\boldsymbol{B}$ s'écrit donc :

$$m\frac{dv_\parallel}{dt} = -\mu\frac{\partial B_z}{\partial z}$$

On multiplie par $v_\parallel$ à gauche et son équivalent $\frac{dz}{dt}$ à droite et il vient :

$$\frac{d\frac{1}{2}mv_\parallel^2}{dt} = -\mu\frac{dB_z}{dt}$$

À noter que $\frac{dB_z}{dt}$ représente la variation du champ B_z vu par la particule pendant son mouvement. cette variation n'est pas nulle puisque la particule se déplace le long de l'axe z.

(d) Comme le champ magnétique ne peut changer la norme de la vitesse de la particule, son énergie cinétique totale se conserve, ce qui s'écrit :

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2}mv_\parallel^2 + \frac{1}{2}mv_\perp^2\right] = 0$$

ou encore :

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2}mv_\parallel^2 + \mu B_z\right] = 0$$

Et donc d'après la relation établie à la question précédente il vient :

$$-\mu\frac{dB_z}{dt}+\frac{d\mu B_z}{dt}=0$$

Ce qui donne finalement la conservation du moment magnétique :

$$\frac{d\mu}{dt}=0 \quad \text{ou} \quad \frac{d\mu}{dz}=0$$

(e) Dans le plan où B est minimal, une particule possède une vitesse v_0 composée d'une vitesse selon z $v_{0\parallel}$ et une vitesse de rotation transverse $v_{0\perp}$. Elle sera réfléchie dans le plan où $v_\parallel=0$. On note $v_\perp$ sa vitesse et B le champ dans ce plan. La conservation du moment magnétique implique que :

$$\frac{\frac{1}{2}mv_{0\perp}^2}{B_0}=\frac{\frac{1}{2}mv_\perp^2}{B}$$

Et la conservation de l'énergie implique que :

$$\frac{1}{2}mv_\perp^2=\frac{1}{2}mv_0^2$$

En combinant ces deux équations on arrive à :

$$\frac{B_0}{B}=\frac{v_{0\perp}^2}{v_0^2}=\sin^2\Psi$$

où Ψ représente l'angle d'inclinaison de l'orbite de Larmor de la particule par rapport à l'axe z dans le plan de champ faible (pitch angle). Si Ψ est trop faible, on a $B>B_M$ et la particule n'est pas réfléchie. En remplaçant B par B_M dans l'équation précédente, on voit que l'angle le plus faible permettant un piégeage de la particule est donné par :

$$\sin^2\Psi_M=\frac{B_0}{B_M}$$

B/

(a) On note v^i et v^f la vitesse de la particule respectivement initiale et après réflexion. Pour la réflexion finale permettra l'éjection de la particule, on a par définition $\sin\Psi_M=\frac{v_\perp^f}{v^f}=\frac{v_\perp^f}{\sqrt{(v_\perp^f)^2+(v_\parallel^f)^2}}$. On a donc $\frac{1}{R_M}=\frac{(v_\perp^f)^2}{(v_\perp^f)^2+(v_\parallel^f)^2}=\frac{1}{1+\left(\frac{v_\parallel^f}{v_\perp^f}\right)^2}$. On sait de plus que μ est constant, donc $(v_\perp^f)^2=(v_\perp^i)^2$. Il vient alors :

$$v_\parallel^f=2v_\perp^i$$

L'énergie finale s'écrit $W^f=\frac{1}{2}m(v_\perp^f)^2+\frac{1}{2}m(v_\parallel^f)^2=\frac{5}{2}m(v_\parallel^i)^2$.

L'énergie initiale s'écrit $W^i=\frac{1}{2}m(v_\perp^i)^2+\frac{1}{2}m(v_\parallel^i)^2=m(v_\parallel^i)^2$ car $v_\perp^i=v_\parallel^i$. On a donc :

$$W^f=\frac{5}{2}W^i=2.5\,\mathrm{keV}$$

(b) Dans le référentiel lié au miroir, le proton ne gagne pas d'énergie à la réflexion. On note les grandeurs dans ce référentiel en majuscules. En valeurs algébriques, on a $V^f=-V^i$. Et $V^i=v^i-v_M$, donc $V^f=v_M-v^i$. Finalement :

$$v^f=2v_M-v^i$$

Le proton gagne $2v_M$ par réflexion, soit $20\,\mathrm{km/s}$.

(c) Les vitesses initiale et finale du proton sont données par $v^{i,f} = \sqrt{\dfrac{2W^{i,f}}{m}}$ avec $m = 1.6 \times 10^{-27}\,\mathrm{kg}$. On trouve $v^i \simeq 447\,\mathrm{km/s}$ et $v^f \simeq 697\,\mathrm{km/s}$, donc une variation totale de vitesse de $260\,\mathrm{km/s}$, ce qui correspond à 13 réflexions magnétiques.

(d) Il nous reste à estimer la vitesse moyenne du proton pendant ces 13 réflexions. On prendra $\bar{v} = \dfrac{v_\parallel^i + v_\parallel^f}{2}$. D'après la question (a) et les données initiales, on a $v_\parallel^f = 2v_\perp^i = 2v_\parallel^i$. On a donc $\bar{v} = \dfrac{3}{2}v_\parallel^i$. Et comme $v_\parallel^i = v_\perp^i$, il vient $\bar{v} = \dfrac{3}{2\sqrt{2}}v^i$, soit $\bar{v} \simeq 474\,\mathrm{km/s}$. La distance parcourue est d'environ $13 \times 10^10\,\mathrm{km}$. On trouve alors un temps écoulé de l'ordre de 9 ans.