PC2 Physique des plasmas

04/12/2014

Exercice 1 - Chauffage magnétique

On considère un plasma plongé dans un champ magnétique statique et uniforme $\boldsymbol{B}$. On suppose que les ions restent immobiles et que les électrons ont la même vitesse d'ensemble $\boldsymbol{v}$. On sépare le problème selon les directions parallèle et perpendiculaire à $\boldsymbol{B}$, et on note $W_\parallel$ et $W_\perp$ les composantes parallèle et transverse de l'énergie cinétique des électrons.

On suppose que toute anisotropie d'énergie se relaxe rapidement sous l'action de collisions avec un temps caractéristique noté $1/\nu$, où ν représente la fréquence des collisions. On admettra que cette isotropisation s'effectue suivant la relation classique :

$$\frac{d}{dt}\left(W_\perp - 2W_\parallel\right) = -\nu\left(W_\perp - 2W_\parallel\right) \tag{0.1}$$

(a) En écrivant la conservation de l'énergie totale, exprimez la variation d'énergie cinétique transverse et parallèle d'un électron en fonction de ν, $W_\parallel$, et $W_\perp$.

On suppose maintenant que le champ magnétique est lentement variable.

(b) On cherche à montrer que le moment magnétique d'un électron dans un tel champ est une constante du mouvement. Pour cette question, on négligera $v_\parallel$.
  (i) Sans chercher à exprimer le champ électrique induit, écrivez le travail élémentaire fourni à l'électron par la force de Lorentz pendant un temps dt
  (ii) Calculez la variation de l'énergie cinétique de l'électron pendant une période de giration, et exprimez-la en fonction du moment magnétique de ce dernier.
  (iii) Déduisez-en que le moment magnétique de l'électron est conservé pendant le mouvement.

(c) Quel terme supplémentaire doit-on ajouter à relation trouvée en (a) pour avoir la variation totale de l'énergie transverse ?

(d) On pose $G = W_\perp^2 W_\parallel / B^2$. Monter que l'évolution temporelle de G peut s'écrire :

$$\frac{dG}{dt} = \frac{\nu}{3}\left(W_\perp - 2W_\parallel\right)^2 \frac{W_\perp}{B^2} \tag{0.2}$$

(e) En déduire qu'un champ magnétique lentement variable et périodique peut chauffer un plasma. Dans quelle direction se produit ce chauffage ?

Exercice 2 - Éclatement coulombien d'un faisceau d'électrons

On modélise un faisceau d'électrons homogène et monocinétique par un cylindre de rayon R et de longueur infinie rempli d'électrons se déplaçant à la vitesse $\boldsymbol{v} = v\hat{\boldsymbol{u}}_{\boldsymbol{z}}$. On note n la densité électronique dans le cylindre, qu'on suppose donc homogène et constante. On se placera tout d'abord dans un repère cylindrique (r, θ, z).

(a) On rappelle que pour une distribution de charges symétrique par rapport à un plan donné, le champ électrique créé en tout point de ce plan appartient à ce plan, et pour une distribution de courant antisymétrique par rapport à un plan donné, le champ magnétique créé en tout point de ce plan appartient à ce plan. Exprimez les champs électrique et magnétique créés à l'intérieur du faisceau.

(b) Calculez les forces électrique et magnétique subies par un électron du faisceau. À quelle condition se compensent-elle ?

Afin d'empêcher l'éclatement du faisceau, on applique maintenant un champ magnétique uniforme $\boldsymbol{B} = B\hat{\boldsymbol{u}}_{\boldsymbol{z}}$, et on considère que la densité électronique reste constante et uniforme. On négligera le champ magnétique induit par le courant électronique.

(c) Écrivez les équations du mouvement dans un repère cartésien (x, y, z). On introduira la variable complexe $\xi = x + iy$.

(d) On cherche une solution de la forme $\xi(t) = \xi_0 e^{i\omega t}$. Trouvez ω et déduisez-en la condition de stabilité du faisceau d'électrons.

(e) Décrivez qualitativement l'orbite des électrons dans le cas stable. Pouvait-on arriver à ce résultat plus rapidement ?

Exercice 3 - Dérive de gradient dans le champ magnétique terrestre

Le champ magnétique terrestre est d'environ 3×10^{-5} T au niveau de l'équateur et décroit en $1/r^3$ comme dans le cas d'un dipôle idéal. Supposons qu'il se trouve dans le plan équatorial et à une distance $r = 5R_T$ une population de protons à 1 eV et d'électrons à 30 keV à une densité de $n = 10^7\,\mathrm{m}^{-3}$. On négligera la dérive due à la courbure des lignes de champ.

(a) Que valent les vitesses de dérive de gradient des protons et des électrons ?

(b) Un électron dérive-t-il vers l'est ou l'ouest ?

(c) Quel est le temps nécessaire à chaque particule pour faire le tour de la Terre ?

(d) Calculez la densité de courant électrique due à ce mouvement.

Exercice 4 - Accélération de Fermi des rayons cosmiques

A. Conservation du moment magnétique et miroir magnétique

Soit un champ magnétique $\boldsymbol{B}$ dirigé globalement selon z, et présentant un gradient dans cette même direction $\frac{\partial B}{\partial z} > 0$. Les lignes d'induction se resserrent donc le long de l'axe z. On suppose une symétrie de révolution du problème et on s'intéresse au mouvement d'une particule de charge q dans ce champ.

(a) Exprimez la composante transverse du champ magnétique et explicitez la force de Lorentz due à ce champ. On supposera que le gradient longitudinal de $\boldsymbol{B}$ ne dépend pas de r.

(b) On considère que le centre guide de la particule reste sur l'axe. Calculez la moyenne de la composante longitudinale de la force de Lorentz sur une giration de la particule.

(c) Écrivez l'équation du mouvement longitudinal de la particule, et déduisez-en sa variation d'énergie cinétique longitudinale.

(d) En écrivant la conservation de l'énergie totale de la particule, établissez que le moment magnétique de cette dernière est une constante du mouvement.

(e) On étudie la configuration de Helmholtz : on place le long de l'axe z deux bobines créant un champ magnétique maximal B_M au niveau des bobines et minimal B_0 dans le plan médian. En utilisant la conservation du moment magnétique et celle de l'énergie, trouver le cône de perte (les particules non confinées) de cette configuration. Le rapport $R_M = B_M/B_0$ est appelé rapport miroir de la configuration.

B. Accélération de Fermi

Le mécanisme suivant a été proposé par Fermi pour expliquer le mode de formation des rayons cosmiques par l'accélération de particules chargées suite à une réflexion sur un miroir magnétique mobile (dû par exemple à un nuage interstellaire magnétisé en mouvement). On considère un proton d'énergie 1 keV confiné entre deux miroirs magnétiques de rapport miroir égal à 5 et qui se rapprochent du plan central à une vitesse $v_M = 10\,\mathrm{km/s}$. La distance entre les miroirs est notée L et est de l'ordre de 10^{10} km. Le proton a une vitesse initiale $\boldsymbol{v^i}$ telle que $v_\parallel^i = v_\perp^f$.

(a) En utilisant la conservation du moment magnétique, calculez l'énergie W^f du proton avant qu'il ne sorte du confinement.
(b) Montrez que l'énergie gagnée par le proton chaque réflexion vaut $2v_M$. On pourra se placer dans le référentiel lié au miroir.
(c) Calculez le nombre de réflexions subies par le proton avant d'atteindre l'énergie W^f.
(b) Déduisez-en le temps écoulé avant l'éjection du proton. On pourra négliger la variation de la distance L due au déplacement des miroirs.