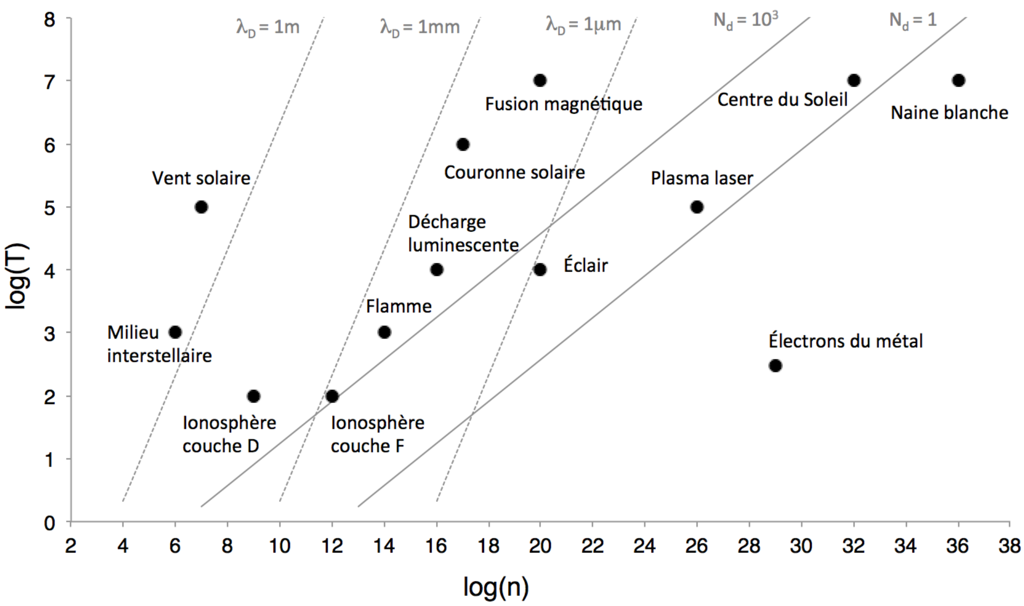
PC1 Physique des plasmas

27/11/2014

Exercice 1



Avec $\lambda_D = \sqrt{\frac{\varepsilon_0 k_B T}{n e^2}}$ et $N_D = n\frac{4}{3}\pi\lambda_D^3$, les courbes $\lambda_D = \mathrm{c}^{\mathrm{te}}$ et $N_D = \mathrm{c}^{\mathrm{te}}$ sont des droites de pentes respectives 1 et 1/3.

Même si les plasmas considérés ont des température et densités très différentes, ils ont pour la plupart ($N_D \gg 1$) un comportement collectif pour peu qu'on les observe sur une échelle grande devant leur longueur de Debye.

Exercice 2

(a) L'équation de Poisson est :

$$-\varepsilon_0 \nabla^2\phi = -n_e e + n_i Z e + Ze\,\delta(r)$$

Les densités de particules suivant la relation de Boltzmann, on a donc :

$$\nabla^2\phi = \frac{n_e^0 e}{\varepsilon_0}\exp\left(\frac{e\phi}{k_B T}\right) - \frac{n_i^0 Z e}{\varepsilon_0}\exp\left(-\frac{Ze\phi}{k_B T}\right) - \frac{Ze}{\varepsilon_0}\delta(r)$$

(b) $\exp(x) \simeq 1 + x$ si $x \ll 1$, donc l'équation précédente devient :

$$\nabla^2\phi = \frac{n_e^0 e}{\varepsilon_0}\left[1 + \frac{e\phi}{k_B T}\right] - \frac{n_i^0 Ze}{\varepsilon_0}\left[1 - \frac{Ze\phi}{k_B T}\right] - \frac{Ze}{\varepsilon_0}\delta(r)$$

Le plasma est globalement neutre, donc $n_e^0 e = n_i^0 Ze$, et on arrive à :

$$\nabla^2\phi = \frac{n_e^0 e^2\phi}{\varepsilon_0 k_B T} + \frac{n_i^0 Z^2 e^2\phi}{\varepsilon_0 k_B T} - \frac{Ze}{\varepsilon_0}\delta(r)$$

En posant $\dfrac{1}{\lambda_D^2} = \dfrac{n_e^0 e^2}{\varepsilon_0 k_B T} + \dfrac{n_i^0 Z^2 e^2}{\varepsilon_0 k_B T}$, il vient :

$$\nabla^2\phi - \frac{\phi}{\lambda_D^2} + \frac{Ze}{\varepsilon_0}\delta(r) = 0$$

(c) Comme le potentiel ne dépend que de r, le laplacien s'écrit en coordonnées sphériques $\nabla^2 = \dfrac{1}{r^2}\dfrac{d}{dr}\left(r^2\dfrac{d}{dr}\right)$. L'équation sur le potentiel devient alors pour $r \neq 0$:

$$\frac{d^2\phi}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{d\phi}{dr} - \frac{\phi}{\lambda_D^2} = 0$$

Comme le potentiel coulombien non écranté varie en $\dfrac{1}{r}$, on cherche une solution de la forme $\phi(r) = \dfrac{\psi(r)}{r}$. On a alors $\dfrac{d\psi}{dr} = r\dfrac{d\phi}{dr} + \phi$, et $\dfrac{d^2\psi}{dr^2} = r\dfrac{d^2\phi}{dr^2} + 2\dfrac{d\phi}{dr}$. L'équation vérifiée par ψ est alors pour $r \neq 0$:

$$\frac{d^2\psi}{dr^2} - \frac{\psi}{\lambda_D^2} = 0$$

La solution est donc de la forme $\psi(r) = A\exp\left(-\dfrac{r}{\lambda_D}\right) + B\exp\left(+\dfrac{r}{\lambda_D}\right)$, soit :

$$\phi(r) = \frac{A}{r}\exp\left(-\frac{r}{\lambda_D}\right) + \frac{B}{r}\exp\left(+\frac{r}{\lambda_D}\right)$$

(d) Lorsque $r \to \infty$ on doit avoir $\phi \to 0$, donc $B = 0$ et lorsque $r \to 0$ (pas d'écrantage), le potentiel doit tendre vers le potentiel coulombien $\dfrac{Ze}{4\pi\varepsilon_0 r}$. On a donc $A = \dfrac{Ze}{4\pi\varepsilon_0}$ et on obtient finalement l'expression du potentiel de Debye :

$$\phi(r) = \frac{Ze}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e^{-r/\lambda_D}}{r}$$

Exercice 3

L'équation de Poisson s'écrit dans ce cas :

$$\frac{d^2\phi}{dx^2} = -\frac{nq}{\varepsilon_0}$$

Le potentiel entre les plaques est donc de la forme $\phi(x) = -\dfrac{nq}{2\varepsilon_0}x^2 + bx + c$. Par symétrie, on a $\dfrac{d\phi}{dx}(0) = 0$, donc $b = 0$. De plus, $\phi(\pm d) = 0$, donc $c = \frac{nq}{2\varepsilon_0}d^2$. Finalement :

$$\phi(x) = \frac{nq}{2\varepsilon_0}(d^2 - x^2)$$

L'énergie nécessaire au déplacement d'une particule d'une région de potentiel ϕ_1 vers une région de potentiel ϕ_2 est égale à $q\phi_2 - q\phi_1$. Dans notre cas, $\phi_1 = \phi(\pm d) = 0$ et $\phi_2 = \phi(0) = \frac{nqd^2}{2\varepsilon_0}$, ce qui donne :

$$\mathcal{E} = \frac{nq^2}{2\varepsilon_0} d^2$$

Si $d = \lambda_D = \frac{\varepsilon_0 k_B T}{nq^2}$, on a alors $\mathcal{E} = \frac{1}{2} k_B T$

Pour une distribution de vitesse maxwellienne 1D, l'énergie cinétique moyenne des particules est donnée par $\bar{\mathcal{E}} = \frac{1}{2} k_B T$. Pour une distribution 3D, cette énergie vaut $\bar{\mathcal{E}} = \frac{3}{2} k_B T$.

Le facteur 3 n'a pas d'importance ici. Ce qu'il faut retenir est qu'une particule animée d'une vitesse thermique ne peut pas se déplacer très loin dans un plasma (*i.e.* $d \gg \lambda_D$) si la charge d'une espèce n'est pas neutralisée par la charge d'une autre espèce.

Exercice 4

(a) L'équation de Poisson dans la tranche $|x| \leq L/2$ s'écrit $\frac{d^2\phi}{dx^2} = \frac{Zen_i^{(0)}}{\varepsilon_0}$. Le potentiel est symétrique par rapport au plan $x = 0$, donc on a $\phi(x) = \frac{Zen_i^{(0)}}{2\varepsilon_0} x^2 + \phi_0$. La différence de potentiel entre les plans $x = 0$ et $x = L/2$ vaut donc :

$$\Delta\phi = \frac{Zen_i^{(0)} L^2}{8\varepsilon_0}$$

Pour $Z = 1$, $L = 1$ mm et $n_i^{(0)} = 10^{20}$ m^{-3}, on trouve $\Delta\phi = 2.26\,10^5$ V...

(b) L'équation du mouvement pour un électron s'écrit : $\frac{d^2x}{dt^2} = -eE(x)$ avec $E(x) = -\frac{d\phi}{dx} = \frac{Zen_i^{(0)}}{\varepsilon_0} x$. On a donc :

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{Ze^2 n_i^{(0)}}{m_e \varepsilon_0} x = 0$$

On pose $\omega_p^2 = \frac{Ze^2 n_i^{(0)}}{m_e \varepsilon_0}$ et grâce aux conditions initiales $x(0) = \frac{L}{2}$ et $\frac{dx}{dt}(0) = 0$ on a alors :

$$x(t) = \frac{L}{2} \cos(\omega_p t)$$

Il s'agit donc d'un mouvement oscillatoire à la fréquence ω_p. L'onde correspondante (onde de Langmuir) peut se propager dans un plasma non magnétisé.

(c) Dans le cadre d'une petite perturbation de densité $n_j = n_j^{(0)} + n_j^{(1)}$, l'équation de Poisson s'écrit :

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{E}^{(1)} = \frac{Zen_i^{(1)} - en_e^{(1)}}{\varepsilon_0}$$

Les équations du mouvement sont données par :

$$\begin{aligned} \frac{d\boldsymbol{v}_e^{(1)}}{dt} &= -\frac{e}{m_e} \boldsymbol{E}^{(1)} \\ \frac{d\boldsymbol{v}_i^{(1)}}{dt} &= \frac{Ze}{m_i} \boldsymbol{E}^{(1)} \end{aligned}$$

À l'ordre 1 on a $\dfrac{d\boldsymbol{v}_j^{(1)}}{dt} \simeq \dfrac{\partial \boldsymbol{v}_j^{(1)}}{\partial t}$. Les équations de continuité sont données par :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial n_e^{(1)}}{\partial t} + \boldsymbol{\nabla} \cdot \left(n_e^{(0)} \boldsymbol{v}_e^{(1)}\right) &= 0 \\
\frac{\partial n_i^{(1)}}{\partial t} + \boldsymbol{\nabla} \cdot \left(n_i^{(0)} \boldsymbol{v}_i^{(1)}\right) &= 0
\end{aligned}$$

Pour les électrons, on dérive l'équation de continuité, ce qui donne :

$$\frac{\partial^2 n_e^{(1)}}{\partial t^2} + n_e^{(0)} \boldsymbol{\nabla} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{v}_e^{(1)}}{\partial t} = 0$$

En utilisant l'équation du mouvement il vient :

$$\frac{\partial^2 n_e^{(1)}}{\partial t^2} - \frac{e n_e^{(0)}}{m_e} \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{E}^{(1)} = 0$$

Puis en utilisant l'équation de Poisson :

$$\frac{\partial^2 n_e^{(1)}}{\partial t^2} - \frac{e^2 n_e^{(0)}}{\varepsilon_0 m_e} \left[Z n_i^{(1)} - n_e^{(1)}\right] = 0$$

On a de même pour les ions :

$$\frac{\partial^2 Z n_i^{(1)}}{\partial t^2} + \frac{Z^2 e^2 n_i^{(0)}}{\varepsilon_0 m_i} \left[Z n_i^{(1)} - n_e^{(1)}\right] = 0$$

On pose $\eta = Z n_i^{(1)} - n_e^{(1)}$ et on soustrait les deux équation précédentes :

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} + \left[\frac{Z^2 e^2 n_i^{(0)}}{\varepsilon_0 m_i} + \frac{e^2 n_e^{(0)}}{\varepsilon_0 m_e}\right] \eta = 0$$

On a donc :

$$\omega_p^2 = \frac{Z^2 e^2 n_i^{(0)}}{\varepsilon_0 m_i} + \frac{e^2 n_e^{(0)}}{\varepsilon_0 m_e} = \omega_{pe}^2 + \omega_{pi}^2$$

(d) En prenant le rotationnel de l'équation de Maxwell-Ampère, il vient :

$$\boldsymbol{\nabla} \times (\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{E}) = \boldsymbol{\nabla}(\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{E}) - \nabla^2 \boldsymbol{E} = -\mu_0 \frac{\partial \boldsymbol{j}}{\partial t} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \boldsymbol{E}}{\partial t^2}$$

avec $\boldsymbol{j} \simeq \boldsymbol{j}_e = -e n_e \boldsymbol{v}_e$. On considère une onde plane de la forme $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}, t) = \boldsymbol{E}_0 e^{i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r} - \omega t)}$. On a alors $\dfrac{\partial}{\partial t} = -i\omega$ et $\boldsymbol{\nabla} = i\boldsymbol{k}$. L'onde est transverse, donc $i\boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{E} = 0$ donc il vient finalement :

$$k^2 \boldsymbol{E} = -\mu_0 \frac{\partial \boldsymbol{j}}{\partial t} + \frac{\omega^2}{c^2} \boldsymbol{E}$$

et $\dfrac{\partial \boldsymbol{j}}{\partial t} = -e n_e \dfrac{\partial \boldsymbol{v}_e}{\partial t} = \dfrac{e^2 n_e}{m_e} \boldsymbol{E}$ d'après l'équation du mouvement électronique. On en déduit la relation de dispersion :

$$\omega^2 = \omega_p^2 + c^2 k^2$$

avec $\omega_p^2 = \dfrac{ne^2}{m_e \varepsilon_0}$ La fréquence de l'onde est donc nécessairement supérieure à ω_p. Autrement dit, une onde de fréquence inférieure à ω_p ne peut pas se propager dans le plasma, elle est réfléchie par ce dernier.

(e) On calcule $f_p^D \simeq 300\,\mathrm{kHz}$ et $f_p^F \simeq 9\,\mathrm{MHz}$. Les ondes courtes peuvent donc dans certaines conditions être réfléchies par l'ionosphère, c'est ce qui permet la propagation sur de très grandes distances. En réalité, c'est bien plus complexe ! La densité de l'ionosphère dépend de l'altitude, mais aussi de la saison, de si le parcours considéré est éclairé par le soleil, etc...