Corrections PA201-PC1

1 Température et ionisation

1. On souhaite calculer $n_1 n_e / n_0$, en sachant que $n_1 = n_e$. La dégénérescence de l'état g_0 est égale à 2 (les deux spins) alors que $g_1 = 1$. En utilisant $k = 8.6 \times 10^{-5}$ J/K et $U_1 = 13.6\,\mathrm{eV}$ on obtient
$$\frac{n_1^2}{n_0} = \frac{n_1^2}{n - n_1} = 3.25 \times 10^{20} \tag{1}$$
ou nous avons utilisé $n = n_0 + n_1$. En résolvant l'équation on trouve $n_1 = 5.7 \times 10^{22}\,\mathrm{m}^{-3}$, ce qui correspond à un tas de ionisation du $n_1/n_0 = 5.7 \times 10^{-2}$.

2. La distribution du vecteur vitesse est
$$f(\mathbf{v}) = \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} \mathrm{e}^{-m(\mathbf{v}\cdot\mathbf{v})/2kT} \tag{2}$$
Afin de calculer la vitesse la plus probable on cherche le maximum de la fonction de distribution. Le vecteur des vitesses les plus probables est évidemment nul $v_{xm} = v_{ym} = v_{zm} = 0$ pour raisons évidentes. Quand à la vitesse scalaire la plus probable, il est nécessaire partir de l'équation de Maxwell-Boltzmann, obtenue en intégrant (2) en $\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi$. On obtient:
$$f(v) \propto v^2 \mathrm{e}^{-mv^2/2kT} \tag{3}$$
La vitesse qui maximize (3) est telle que $\partial_v f(v) = 0$, donc $v_m = \sqrt{(2kT/m)}$.

3. La distribution (2) devient
$$f(\mathbf{v}) = \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} \mathrm{e}^{-mv_x^2/2kT} \mathrm{e}^{-mv_y^2/2kT} \mathrm{e}^{-m(v_z-u_z)^2/2kT} \tag{4}$$
hence
$$\begin{cases} \langle v_x \rangle = \langle v_y \rangle = 0 \\ \langle v_z \rangle = u_z \end{cases} \tag{5}$$

2 Fréquence plasma

Voir section 1.4 du polycopié.

3 Température et longueur de Debye

1. On écris l'équation de Poisson $\nabla^2 \phi = -\rho/\varepsilon_0$, ou $\rho = e(n_i - n_e)$. Supposant une grille infinie sur le plan $y - z$, la seul composante non nulle du ∇^2 est x. Donc
$$\phi'' = -\frac{e n_0}{\varepsilon_0}\left[\mathrm{e}^{-e\phi/kT_i} - \mathrm{e}^{e\phi/kT_e}\right] \tag{6}$$
Selon le chemin habituel on développe pour $e\phi \ll kT_{e,i}$ d'ou
$$\phi'' \simeq -\frac{e^2 n_0}{\varepsilon_0}\left(\frac{1}{kT_e} + \frac{1}{kT_i}\right) \tag{7}$$
qui a solutions de la forme $\propto \exp(-|x|/\lambda_D)$ ou
$$\lambda_D^{-2} = \frac{n_0 e^2}{\varepsilon_0}\left(\frac{1}{kT_e} + \frac{1}{kT_i}\right) \tag{8}$$

2. L'écrantage le plus efficace est celui qui minimise λ_D, donc l'espèce avec la température la plus petite.

4 Longueur de Debye, potentiel sphérique

L'équation de Poisson, en supposant les ions immobiles ($n_i = n_0$) et les électrons soumis au potentiel ϕ, dévient:

$$\begin{aligned}\nabla^2\phi &= -e(n_i - n_e) && (9)\\ &= -\frac{e}{\varepsilon_0}\left(n_0 - \mathrm{e}^{e\phi/kT}\right) && (10)\\ &\simeq \frac{e}{\varepsilon_0}\left(n_0 + n_0\frac{e\phi}{kT} - n_0\right) && (11)\\ &\simeq \frac{e^2 n_0}{\varepsilon_0 kT}\phi && (12)\end{aligned}$$

L'évidente symétrie centrale du problème permet de limiter l'opérateur de Laplace à la seule composante radiale:

$$\nabla_r^2 = \frac{1}{r^2}\partial_r r^2 \partial_r \tag{13}$$

En partant d'un potentiel de la forme $\phi = A\frac{\mathrm{e}^{-br}}{r}$ on obtient

$$\nabla_r^2\phi = b^2\phi \tag{14}$$

L'équation de Poisson devient donc

$$b^2\phi = \frac{1}{\lambda_D^2}\phi \Rightarrow b = \frac{1}{\lambda_D} \tag{15}$$

En imposant la condition au contour $\phi\left(a\right) = \phi_0$ on a finalement

$$\phi\left(r\right) = \frac{a\phi_0}{\mathrm{e}^{-a/\lambda_D}}\frac{\mathrm{e}^{-r/\lambda_D}}{r} \tag{16}$$

5 Longueur de Debye dans un condensateur

1. En une seule dimension l'équation de Poisson devient

$$\partial_x^2 = -\frac{qn}{\varepsilon_0} \tag{17}$$

En intégrant deux fois l'équation on obtient

$$\phi\left(x\right) = -\frac{qn}{2\varepsilon_0}x^2 + Ax + B \tag{18}$$

Le résultat demandé est obtenu en imposant la condition $\phi(\pm d) = 0$.

2. Le travail nécessaire pour transporter une particule de $x = \pm\alpha\lambda_D$ à $x = 0$ est

$$W = q\left[\phi\left(\pm\alpha\lambda_D\right) - \phi\left(0\right)\right] \tag{19}$$

En explicitant λ_D selon sa définition et ayant mis $\langle E_c\rangle = kT/2$ l'énergie cinétique moyenne en 1D on simplifie à

$$W = \alpha^2\left\langle E_c\right\rangle \tag{20}$$

QED.